This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

ÉTUDES ANALYTIQUES

SUR

LA THÉORIE GÉNÉRALE

DES

COURBES PLANES.

L'Auteur et l'Éditeur se réservent le droit de traduire ou de faire traduire cet Ouvrage en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons ou toutes traductions faites au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris dans le cours de 1864, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la griffe de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Mallet-Bachelier

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

ÉTUDES ANALYTIQUES

SUR

LA THÉORIE GÉNÉRALE

DES

COURBES PLANES,

PAR

M. FÉLIX LUCAS,

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES.

22

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1864

(L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.)

~~180. b. 40~~

183. a. 74.

BIBLIOTHECA · BODLEIANA ·

PRÉFACE.

Depuis cinquante ans la Géométrie s'est enrichie d'un grand nombre de découvertes.

Aux théories nouvelles s'attachent les noms des Gergonne, Poncelet, Chasles, Bobillier, Brioschi, Möbius, Grassmann, Plücker, Otto Hesse, Cayley, Sylvester, Salmon, etc.; c'est dire quel intérêt elles offrent. Cependant elles sont peu répandues en France.

Dans ses *Applications d'Analyse et de Géométrie*, M. le général Poncelet dit, en parlant des progrès de la Géométrie moderne :

« Il fallait que ces doctrines, ces propositions diverses fussent traduites et élucidées dans la langue familière aux différents esprits, aux aptitudes diverses de ceux qui écrivent ou s'exercent sur la matière; en un mot, il fallait qu'on se créât des méthodes d'exposition, de démonstration, en quelque sorte personnelles, fondées sur de nouvelles notations, conventions ou dénominations, sur de nouveaux artifices même de calcul algébrique ou de langage géométrique, mais plus particulièrement sur des systèmes de coordonnées linéaires, distinctes de celles de Descartes, et qu'on a vu paraître successivement, à partir de 1827, dans les *Annales de Mathématiques*, dans le *Journal de Crelle* ou dans des ouvrages postérieurs. »

Les coordonnées de Descartes étant seules usitées dans nos lycées et dans nos écoles, la plupart des hommes spé-

ciaux qui, par position ou par goût, s'adonnent à la science, ne renoncent pas volontiers à des procédés qui leur sont familiers et peuvent reculer devant l'adoption des nouveaux artifices, si ingénieux qu'ils soient, de la Géométrie moderne.

Nous nous sommes efforcé, dans les études qui suivent, d'exposer, au moyen des procédés *classiques*, quelques théories nouvelles.

Cet ouvrage atteindra son but s'il peut contribuer à répandre le goût des doctrines dont la Géométrie s'est enrichie dans notre siècle.

F. Lucas.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

PRÉFACE..... V

LIVRE PREMIER.

DIAMÈTRES, POINTS REMARQUABLES ET BRANCHES INFINIES.

CHAPITRE PREMIER.

DES POINTS CENTRAUX D'UN SYSTÈME DE POINTS-RACINES.

1. Définition géométrique des points centraux..... 1
2. Définition analytique..... 2
3. Cas où l'un des points donnés est à l'infini..... 2
4. Cas où deux ou plusieurs des points donnés coïncident..... 3
5. Cas où deux ou plusieurs des points donnés sont à l'infini..... 4
6. Cas où les points donnés ont un centre de symétrie..... 4
7. Points centraux des différents ordres..... 5
8. Centre des moyennes distances..... 5
9. Propriété projective..... 6

CHAPITRE II.

THÉORIE GÉNÉRALE DES DIAMÈTRES.

1. Des diamètres dans les coniques..... 7
2. Inconvénient de la méthode des points milieux..... 7
3. Généralisation de la théorie des diamètres au moyen des points centraux..... 8
4. Équation générale des diamètres..... 8
5. Des tangentes parallèles à une direction donnée..... 9
6. Diamètres des différents ordres..... 9
7. Diamètres harmoniques..... 10
8. Propriété projective..... 11

CHAPITRE III.

DES POINTS REMARQUABLES.

Pages.
1. Ce qu'on entend par points remarquables..... 12
2. Centres..... 12
3. Points d'inflexion..... 13
4. Points singuliers..... 14
5. Pôles de l'infini..... 15
6. Courbe centrale..... 16

CHAPITRE IV.

DES BRANCHES INFINIES.

1. Détermination analytique des points à l'infini..... 18
2. Différentes espèces de branches infinies..... 19
3. Points hyperboliques et points paraboliques..... 19
4. Diamètres des directions hyperboliques..... 20
5. Détermination analytique des asymptotes..... 20

LIVRE II.

PÔLES ET POLAIRES. — POLAIRES DIAMÉTRALES. — COURBES PIVOTANTES.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME DE POINTS-RACINES. — POINTS CONJUGUÉS ET POINTS HARMONIQUES.

1. Définition géométrique des points conjugués..... 23
2. Définition analytique..... 23
3. Nouvelles définitions géométriques..... 24
4. Des conjugués d'un groupe de points..... 26
5. Forme développée de l'équation aux conjugués d'un groupe de points..... 27
6. Conjugués des différents ordres d'un même point..... 28
7. Autre forme de l'équation aux points conjugués de l'ordre n.. 30
8. Conséquence remarquable des formules précédentes..... 31
9. Groupes associés..... 32

Pages.
10. Points harmoniques..... 32
11. Propriété perspective..... 33
12. Cas où deux ou plusieurs des points donnés coïncident..... 34
13. Cas où le point S coïncide avec un des points donnés..... 35
14. Cas où le point S va à l'infini..... 36

CHAPITRE II.

PÔLES ET POLAIRES.

1. Pôles et polaires dans les coniques..... 37
2. Méthode de généralisation..... 37
3. Équation générale des polaires conjuguées..... 38
4. Des tangentes à une courbe donnée issues d'un point extérieur. 39
5. Équations générales aux pôles harmoniques..... 39
6. Corrélation entre les pôles et les polaires conjugués et harmoniques..... 40
7. Polaires des différents ordres..... 41
8. Conditions pour qu'une équation entre x et y, du degré $p-n$, représente une polaire de l'ordre n..... 43
9. Pôles des différents ordres..... 44
10. Conditions pour qu'un groupe de n^2 points soit composé de pôles de l'ordre n..... 44
11. Corrélation des pôles et des polaires de tous les ordres..... 45
12. Nouvelle forme de l'équation générale des polaires de l'ordre n. 46
13. Polaire d'un groupe de n points..... 47
14. Polaires des différents ordres d'un point de la courbe donnée.. 48
15. Polaires des points d'inflexion et des points singuliers..... 48
16. Polaires des différents ordres d'un point à l'infini,..... 49
17. Propriété générale des polaires de groupes de points..... 49
18. Propriété générale des groupes de pôles..... 50
19. Propriété perspective..... 50
20. Nouvelle définition de la courbe centrale..... 50
21. Courbe hessienne..... 51

CHAPITRE III.

POLAIRES DIAMÉTRALES.

1. Tangentes à une courbe issues d'un point extérieur..... 53
2. Définition de la polaire diamétrale d'un point..... 53
3. Propriétés des polaires diamétrales..... 54
4. Polaires diamétrales dans les coniques..... 55
5. Polaire diamétrale d'un point de la courbe..... 55

Pages.
6. Polaire diamétrale d'un point à l'infini..... 55
7. Polaire diamétrale d'un pôle de l'infini..... 56
8. Polaire diamétrale des différents points d'une droite..... 56
9. Intersection de deux polaires diamétrales..... 58
10. Propriété projective..... 58

CHAPITRE IV.

COURBES PIVOTANTES.

1. Observation sur les théories précédentes..... 59
2. Définition et équation générale des courbes pivotantes..... 59
3. Propriété des coniques circonscrites à un même quadrilatère.. 60
4. Propriété d'un faisceau pivotant quelconque..... 60
5. Observation relative aux groupes de pivots..... 61

LIVRE III.

GÉOMÉTRIE TANGENTIELLE. — COURBES ROULANTES. — PRINCIPE DE DUALITÉ.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME DE DROITES CONVERGENTES, DROITES CONJUGUÉES ET DROITES HARMONIQUES.

1. Définitions géométrique et analytique des droites conjuguées.. 63
2. Nouvelle définition géométrique. Droites harmoniques..... 65
3. Observation relative à l'équation aux droites conjuguées..... 66
4. Conséquences de cette remarque..... 66
5. Propriété perspective..... 67

CHAPITRE II.

COORDONNÉES TANGENTIELLES.

1. Coordonnées d'une droite..... 69
2. Équation d'un point..... 69
3. Équations tangentielles des courbes..... 70
4. Équations tangentielles algébriques..... 70
5. Intersection d'une courbe et d'une droite..... 71
6. Intersection de deux courbes..... 72
7. Observation relative aux droites conjuguées..... 72

CHAPITRE III.

PÔLES ET POLAIRES TANGENTIELS.

Pages.
1. Équation générale des pôles tangentiels..... 74
2. Équations générales aux groupes de polaires tangentielles..... 74
3. Corrélation des pôles et des polaires tangentiels..... 75
4. Pôles tangentiels harmoniques..... 75
5. Pôles tangentiels des différents ordres d'une tangente à la courbe. 76
6. Tangentes singulières et tangentes de rebroussement..... 76
7. Propriété des groupes de polaires tangentielles..... 77
8. Pôles tangentiels de la droite à l'infini..... 77
9. Propriété perspective..... 77

CHAPITRE IV.

COURBES ROULANTES.

1. Définition et équation tangentielle des courbes roulantes..... 78
2. Propriété d'un faisceau roulant quelconque..... 78
3. Observation relative aux axes de roulement..... 79

CHAPITRE V.

PRINCIPE DE DUALITÉ.

1. Deux points de vue sous lesquels on peut envisager les courbes. 80
2. Formule générale du principe de dualité..... 80
3. Propriétés descriptives et propriétés métriques..... 83

LIVRE IV.

CENTRES ET AXES DES MOYENNES HARMONIQUES. — TRANSVERSALES ET SOMMETS.

CHAPITRE PREMIER.

AXES ET CENTRES DES MOYENNES HARMONIQUES.

§ I. — *Polygones définis par leurs côtés.*

1. Polaires cartésiennes d'un point relativement à un système de p droites..... 85
2. Polaires du premier ordre..... 86

Pages.
3. Polaires harmoniques..... 87
4. Propriétés analytiques..... 87
5. Propriété mécanique..... 89
6. Théorème relatif au triangle..... 90

§ II. — *Polygones définis par leurs sommets.*

7. Pôles tangentiels d'une droite relativement à un système de points..... 91
8. Pôles du premier ordre..... 91
9. Pôles harmoniques..... 91
10. Propriété mécanique..... 92
11. Propriété analytique..... 93
12. Théorème relatif au triangle..... 94

§ III. — *Courbes géométriques en général.*

13. Axe des moyennes harmoniques..... 94
14. Propriété mécanique..... 95
15. Centre des moyennes harmoniques..... 95
16. Propriété mécanique..... 96

CHAPITRE II.

THÉORIE DES TRANSVERSALES.

1. Sens géométrique de l'expression $f(\alpha, \beta)$..... 97
2. Théorème de Carnot..... 98
3. Théorème de Newton..... 99
4. Application du théorème de Newton à la construction des tangentes..... 100
5. Application du théorème de Carnot à la construction du cercle osculateur..... 101
6. Théorème relatif à l'intersection de deux courbes..... 102
7. Application de ce théorème..... 102
8. Propriétés des transversales..... 103
9. Polygones inscrits dans les coniques. Généralisation du théorème de Pascal..... 105

CHAPITRE III.

THÉORIE DES SOMMETS.

1. Définition des sommets..... 107
2. Théorème de M. Chasles..... 107

Pages.
3. Théorème relatif aux tangentes communes à plusieurs courbes. 108
4. Application de ce théorème..... 108
5. Propriétés des sommets..... 109
6. Polygones circonscrits aux coniques..... 110

LIVRE V.

CORRESPONDANCE ANHARMONIQUE. — DIVISIONS SEGMENTAIRES ET TANGENTIELLES. — HOMOGRAPHIE ET INVOLUTION.

CHAPITRE PREMIER.

CORRESPONDANCE ANHARMONIQUE DANS LES FAISCEAUX DE COURBES.

1. Courbes pivotantes homographiques..... 111
2. Courbes roulantes homographiques..... 112
3. Propriété générale..... 112
4. Exemple de correspondance anharmonique..... 112
5. Lieux géométriques..... 113
6. Conditions pour établir la liaison anharmonique de deux faisceaux. 114
7. Propriété perspective..... 114

CHAPITRE II.

HOMOGRAPHIE SUR LES DROITES ET AUTOUR DES POINTS.

1. Groupes de points en ligne droite et groupes de droites convergentes..... 115
2. Équation aux groupes mobiles de p éléments..... 115
3. Divisions homographiques des degrés p, q..... 117
4. Équation anharmonique des degrés p, q..... 117
5. Conditions pour déterminer l'équation anharmonique..... 119
6. Forme simplifiée de cette équation..... 119
7. Conditions pour qu'une équation des degrés p et q en x et α soit anharmonique..... 121
8. Propriété générale..... 121
9. Divisions sur une même droite ou autour d'un même point. Éléments doubles..... 122

Pages.

10. Divisions sur des droites différentes ou autour de points différents. Lieux géométriques..... 122

CHAPITRE III.

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES DIVISIONS SEGMENTAIRES ET TANGENTIELLES.

§ I. — *Division sur une droite par groupes de points.*

1. Relation géométrique entre deux points d'un même groupe... 124
2. Deux groupes distincts n'ont pas de points communs..... 125
3. Propriété du point à l'infini..... 126
4. Polygones directeurs..... 126
5. Courbes harmoniques relatives à un groupe de droites..... 128
6. Nouvelle définition des divisions par groupes de points..... 129
7. Points multiples..... 130

§ II. — *Division autour d'un point par groupe de droites.*

8. Relation géométrique entre les rayons d'un même groupe..... 130
9. Deux groupes distincts n'ont pas de rayons communs..... 132
10. Rayons multiples..... 132
11. Relation entre les divisions tangentielles et les divisions segmentaires..... 132

§ III. — *Nouvelles propriétés des faisceaux pivotants et des faisceaux roulants.*

12. Intersections des courbes d'un faisceau pivotant et d'une droite quelconque..... 133
13. Conséquence du numéro précédent..... 134
14. Tangentes menées d'un point quelconque aux diverses courbes d'un faisceau roulant..... 134
15. Conséquence du numéro précédent..... 135

CHAPITRE IV.

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES DIVISIONS HOMOGRAPHIQUES.

1. Relation géométrique entre les points de deux groupes homologues dans les divisions segmentaires..... 136
2. Propriété des faisceaux pivotants homographiques..... 138
3. Propriété des faisceaux roulants homographiques..... 138

CHAPITRE V.

INVOLUTION SUR LES DROITES ET AUTOUR DES POINTS.

Pages.
1. Divisions polaires 139
2. Équation aux groupes polaires 140
3. Nouvelle forme de cette équation 140
4. Involution sur la droite et autour du point 142
5. Équation d'involution des degrés p, q 142
6. Forme anharmonique simplifiée de cette équation 143
7. Détermination de la constante k 144
8. Formule algébrique 145
9. Conditions pour qu'une équation à deux variables soit d'involution 146

LIVRE VI.

GÉNÉRATION ANHARMONIQUE DES COURBES. — INTERSECTIONS. — COURBES OSCULATRICES.

CHAPITRE PREMIER.

GÉNÉRATION ANHARMONIQUE ET CONSTRUCTION DES COURBES.

1. Manière d'établir géométriquement la liaison anharmonique de deux courbes pivotantes 147
2. Principe de la génération anharmonique des courbes 149
3. Construction des coniques 150
4. Difficulté lorsque p surpasse 2; question préalable 150
5. Solution générale du problème 154
6. Simplification du problème dans le cas où m est égal à 1 155
7. Simplification analogue dans le cas où m est égal à 2 156
8. Impossibilité d'étendre la méthode simplifiée au cas où m surpasse 2 158
9. Conclusions 159

CHAPITRE II.

INTERSECTIONS DES COURBES ET COURBES OSCULATRICES.

1. Équation générale de la courbe du degré p 161
2. Cas d'indétermination 161

Pages.
3. Conditions pour qu'une courbe du degré p soit composée de deux courbes compagnes des degrés q et $p-q$..... 162
4. Conséquences de l'observation précédente..... 163
5. Intersection de deux courbes des degrés p, q qui ont en commun un groupe de points pivotables..... 164
6. Propriétés des groupes pivotables..... 165
7. Intersection d'une courbe et d'une droite..... 165
8. Courbes osculatrices..... 166
9. Application aux courbes du troisième degré..... 167

LIVRE VII.

PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME DE POINTS NON EN LIGNE DROITE. — GROUPES ASSOCIÉS SUR LES CONIQUES. — TRANSFORMATION DES FIGURES.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME DE POINTS NON EN LIGNE DROITE.

§ I. — *Points centraux.*

1. Définition des points centraux..... 169
2. Détermination analytique..... 169
3. Solutions étrangères..... 170
4. Disparition des solutions imaginaires..... 170
5. Points centraux des différents ordres..... 172

§ II. — *Groupes associés.*

6. Définition des conjugués d'un point..... 173
7. Détermination analytique..... 174
8. Solutions étrangères..... 175
9. Disparition des solutions imaginaires..... 175
10. Points conjugués des différents ordres. Groupes associés..... 177
11. Cas où le point S est à l'infini..... 178
12. Propriétés des polygones réguliers..... 179

CHAPITRE II.

GROUPES ASSOCIÉS SUR LES CONIQUES.

1. Propriété du cercle..... 180
2. Extension aux coniques..... 182

Pages.
3. Groupes associés..... 182
4. Nouvelle définition des points conjugués sur le cercle..... 183

CHAPITRE III.

TRANSFORMATION DES FIGURES AU MOYEN DES COORDONNÉES SYMBOLIQUES.

1. Méthode générale de transformation..... 185
2. Conservation des angles..... 185
3. Méthode des rayons vecteurs réciproques..... 187
4. Théorèmes sur les groupes associés..... 188
5. Transformation d'un cercle..... 189
6. Considérations géométriques..... 190
7. Conséquence..... 192
8. Usage de la méthode des rayons vecteurs réciproques..... 193

APPENDICE.

DESCRIPTION DES COURBES DU TROISIÈME DEGRÉ.

CHAPITRE PREMIER.

CLASSIFICATION DES COURBES DU TROISIÈME DEGRÉ.

1. Division analytique en trois familles..... 195
2. Classification par les points à l'infini..... 196
3. Classification par les diamètres..... 197
4. Classification par la conique centrale..... 198
5. Résumé..... 199
6. Équation simplifiée de la famille hyperbolique..... 200
7. Équation simplifiée de la famille elliptique..... 200
8. Équations simplifiées de la famille parabolique..... 201
9. Dénominations newtoniennes..... 204
10. Nombre des espèces..... 205

CHAPITRE II.

COURBES DE LA FAMILLE HYPERBOLIQUE.

1. Forme générale des hyperboles redondantes..... 206
2. Hyperboles médianes..... 206
3. Propriété du triangle asymptotique..... 207

Pages.
4. Propriété des hyperboles médianes..... 208
5. Ellipse centrale..... 208
6. Diamètres en général..... 209
7. Intersections des asymptotes et de la courbe..... 210
8. Construction de la courbe..... 210
9. Droites médianes..... 211
10. Dégénérescence du triangle asymptotique en un point..... 211
11. Nombre des espèces..... 212

CHAPITRE III.

COURBES DE LA FAMILLE ELLIPTIQUE.

1. Forme générale des hyperboles définitives..... 213
2. Conique centrale..... 213
3. Diamètres..... 214
4. Nouvelle forme de l'équation..... 215
5. Conséquences de cette équation..... 216
6. Nombre des espèces..... 217

CHAPITRE IV.

COURBES DE LA FAMILLE PARABOLIQUE.

1. Caractères distinctifs..... 218

Première classe.

2. Propriétés générales..... 218
3. Hyperboles paraboliques..... 220
4. Hyperbolismes..... 221

Deuxième classe.

5. Propriétés générales..... 223
6. Paraboles divergentes..... 224
7. Tridents..... 224
8. Parabole cubique..... 225
9. Droites parallèles..... 226

NOTES.

Pages.

NOTE I. — Sur l'équation du diamètre harmonique 229

NOTE II. — Sur les diamètres des directions hyperboliques..... 231

NOTE III. — Sur la formule $P_t S_{n-t} = \theta^{(t)}(x)$ 231

NOTE IV. — Sur l'équation de la polaire d'ordre n..... 233

NOTE V. — Sur les équations qui déterminent les pôles d'ordre n. 234

NOTE VI. — Sur le nombre des termes d'un polynôme à deux variables..... 235

NOTE VII. — Sur l'équation du point en Géométrie tangentielle. 235

NOTE VIII. — Sur l'intersection d'une courbe et d'une droite en Géométrie tangentielle 236

NOTE IX. — Sur le pôle tangentiel d'ordre n d'une tangente à une courbe 237

NOTE X. — Sur les tangentes de rebroussement..... 238

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ÉTUDES ANALYTIQUES

SUR

LA THÉORIE GÉNÉRALE

DES

COURBES PLANES.

LIVRE PREMIER.

DIAMÈTRES, POINTS REMARQUABLES ET BRANCHES INFINIES.

CHAPITRE PREMIER.

DES POINTS CENTRAUX D'UN SYSTÈME DE POINTS-RACINES.

---

1. *Définition géométrique des points centraux.*

Considérons, sur une droite, un système de points fixes

$$M_1, \quad M_2, \ldots, \quad M_p$$

et un point mobile V. Le produit

$$M_1V \times M_2V \times \ldots \times M_pV$$

varie quand V se déplace et devient *maximum* pour certaines positions du point mobile.

Nous appellerons ces positions les *points centraux* du système proposé.

Il existe un point central et un seul dans l'intervalle de deux points donnés consécutifs quelconques, en sorte que

le nombre de points donnés étant p, celui des points centraux est $(p-1)$

Lorsque les points donnés se réduisent à deux, il y a un point central unique qui est le milieu de ces deux points.

2. *Définition analytique.*

A la définition géométrique des points centraux on peut substituer une définition purement analytique.

Supposons que les points donnés soient déterminés par leurs distances $x_1, x_2, \ldots, x_p$ à une origine fixe, ces distances étant les racines d'une équation algébrique

$$f(x) = A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_{p-1} x + A_p = 0;$$

on dit alors que les points donnés sont les *points-racines* de cette équation.

Nous désignerons par x la distance du point mobile V à l'origine des abscisses. Le produit X des distances de ce point aux points donnés aura pour expression

$$\pm X = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_p) = \frac{f(x)}{A_0},$$

et les abscisses des points centraux seront déterminées par l'équation dérivée

$$f'(x) = 0.$$

De là une nouvelle définition purement analytique et qui n'exige pas, comme la précédente, que les points donnés soient réels.

3. *Cas où l'un des points donnés est à l'infini.*

Si l'on isole, en particulier, un des points donnés, M_1 par exemple, on peut poser

$$f(x) = (x - x_1)\varphi(x),$$

et par suite

$$f'(x) = \varphi(x) + (x - x_1)\varphi'(x).$$

L'équation

$$f'(x) = 0$$

peut alors être mise sous la forme

$$\frac{\varphi(x)}{x_1} + \left(\frac{x}{x_1} - 1\right)\varphi'(x) = 0;$$

et si l'on suppose que x_1 augmente indéfiniment, c'est-à-dire que le point M_1 aille à l'infini, cette équation se réduit à

$$\left(\frac{x}{x_1} - 1\right)\varphi'(x) = 0,$$

en sorte qu'elle se décompose en ces deux autres

$$\begin{cases} x = x_1, \\ \varphi'(x) = 0. \end{cases}$$

Cette observation conduit à un théorème important qui peut s'énoncer en ces termes :

Théorème I. — *Un point à l'infini parmi les points-racines est toujours un des points centraux du système; les autres points centraux sont précisément ceux du système qu'on obtient en supprimant, parmi les points-racines, le point à l'infini.*

4. *Cas où deux ou plusieurs des points donnés coïncident.*

Si l'on suppose que n des points donnés, par exemple M_1, $M_2, \ldots, M_n$, viennent à se confondre en un seul, leur abscisse commune

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n$$

étant racine, au degré n de multiplicité, de l'équation

$$f(x) = 0,$$

sera racine, au degré $(n-1)$ de multiplicité, de l'équation dérivée

$$f'(x) = 0.$$

De là ce théorème :

Théorème II. — *Tout point multiple de l'ordre n parmi les points donnés est un point multiple de l'ordre $(n-1)$ parmi les points centraux.*

5. *Cas où deux ou plusieurs des points donnés sont à l'infini.*

En rapprochant ce théorème du précédent, on arrive, sans démonstration nouvelle, au théorème suivant, qui est la généralisation du théorème I.

THÉORÈME III.— *Tout point à l'infini, du degré n de multiplicité, parmi les points donnés, est un point central au même degré de multiplicité. Les autres points centraux du système sont précisément ceux du système qu'on obtient en supprimant, parmi les points donnés, le point multiple à l'infini.*

6. *Cas où les points donnés ont un centre de symétrie.*

Supposons maintenant que les points donnés aient un centre de symétrie. S'ils sont en nombre pair, ils pourront être rangés en couples à milieu commun, et, si l'on prend ce milieu pour origine, il n'y aura que des termes de degrés pairs dans l'équation

$$f(x) = 0.$$

Il en résulte que l'équation dérivée

$$f'(x) = 0$$

n'aura que des termes de degrés impairs.

L'origine sera donc un point central, et les autres points centraux pourront être rangés en couples admettant ce point pour milieu commun.

Si les points donnés sont en nombre impair, et si l'on prend pour origine le centre de symétrie, l'équation

$$f(x) = 0$$

n'aura que des termes de degrés impairs, et l'équation dérivée

$$f'(x) = 0$$

n'aura que des termes de degrés pairs. Les points centraux pourront donc être rangés en couples admettant l'origine pour milieu commun.

Par conséquent :

THÉORÈME IV. — *Si les points donnés admettent un centre de symétrie, ce point est aussi un centre de symétrie parmi les points centraux du système.*

En particulier, quand les points donnés se réduisent à deux, leur point central unique ne diffère pas de leur point milieu.

7. *Points centraux des différents ordres.*

Le système des points donnés, déterminé par l'équation du degré p

$$f(x) = 0,$$

ayant donné naissance à des points centraux déterminés par l'équation du degré $(p-1)$,

$$f'(x) = 0,$$

ces derniers forment à leur tour un système de points-racines dont les points centraux sont déterminés par l'équation du degré $(p-2)$

$$f''(x) = 0,$$

et constituent les *points centraux du deuxième ordre* du système donné.

Ces points conduisent eux-mêmes aux *points centraux du troisième ordre*, déterminés par l'équation du degré $(p-3)$

$$f'''(x) = 0.$$

En continuant ainsi, on obtiendrait les points centraux des différents ordres du système proposé.

Il est évident que les points centraux de l'ordre n sont déterminés par une équation du degré $(p-n)$.

8. *Centre des moyennes distances.*

L'ordre le plus élevé correspond à un point central unique, lequel est déterminé par l'équation

$$f^{(p-1)}(x) = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$pA_0x + A_1 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$x = -\frac{A_1}{pA_0}.$$

On reconnaît, par cette formule, que le point central de l'ordre le plus élevé ne diffère pas du *centre des moyennes distances* du système des points donnés.

9. *Propriété projective.*

Sur une droite quelconque et au moyen de plans parallèles entre eux, projetons les points donnés et leurs points centraux.

Nous prendrons, pour nouvelle origine des abscisses x', la projection de l'ancienne origine.

Les abscisses des projections des points donnés seront déterminées par l'équation

$$F(x') = f(hx') = 0,$$

en désignant par h le rapport constant $\frac{x}{x'}$.

Les abscisses des projections des points centraux seront déterminées par l'équation

$$f'_{x'}(hx') = hF'(x') = 0,$$

qui équivaut à l'équation

$$F'(x') = 0.$$

Par conséquent les projections des points centraux sont les points centraux du système projeté.

La démonstration peut s'étendre aux points centraux d'ordres supérieurs.

Donc :

THÉORÈME V.— *Les points donnés et leurs points centraux des différents ordres forment une figure douée de la propriété projective.*

CHAPITRE II.

THÉORIE GÉNÉRALE DES DIAMÈTRES.

1. *Des diamètres dans les coniques.*

La notion des *diamètres* s'est présentée naturellement dans l'étude des sections coniques.

Si, dans une de ces courbes, on prend les milieux des cordes parallèles à une direction donnée, on détermine une série de points dont le lieu géométrique est une ligne droite, diamètre de la direction des cordes.

2. *Inconvénient de la méthode des points milieux.*

On peut aussi trouver des diamètres dans les courbes algébriques de degrés supérieurs.

La méthode de généralisation qui semble la plus naturelle consiste à prendre, sur chaque sécante parallèle à une direction fixe, le milieu de tout intervalle compris entre deux points d'intersection de la sécante et de la courbe. Mais il est facile de voir que si p est le degré de la courbe, les diamètres, tels qu'ils résultent de la définition précédente, sont des courbes du degré $\frac{p(p-1)}{2}$. Par conséquent, dès que p surpasse 2, les diamètres sont d'un degré supérieur à celui de la courbe donnée.

Cet inconvénient est grave; car, en général, il n'y a pas avantage à faire reposer l'étude d'une courbe sur celle d'une courbe plus compliquée.

Laissant de côté cette méthode des *points milieux*, nous allons recourir à un autre ordre d'idées.

3. *Généralisation de la théorie des diamètres au moyen des points centraux.*

Les diamètres dans les coniques sont des droites, lignes d'un degré inférieur à celui des courbes dont elles dérivent.

Pour obtenir dans une courbe d'un degré quelconque un diamètre d'un degré moindre, il suffit de prendre les *points centraux* du système des points d'intersection de cette courbe et d'une sécante mobile, de direction fixe.

C'est cette espèce de diamètre que nous allons étudier.

4. *Équation générale des diamètres.*

Considérons une courbe algébrique, du degré p, ayant pour équation

$$f(x, y) = 0.$$

Menons une sécante ST, parallèle à une direction fixe, et soit

$$y = mx + \lambda$$

l'équation de cette sécante, équation dans laquelle λ représente un paramètre variable.

Les projections des points d'intersection de cette sécante et de la courbe, sur l'axe des abscisses, sont représentées par l'équation

$$f(x, mx + \lambda) = 0,$$

et les points centraux de ces projections par l'équation dérivée

$$f'_x(x, mx + \lambda) + mf'_{mx+\lambda}(x, mx + \lambda) = 0,$$

x et $(mx + \lambda)$ étant regardées comme deux variables indépendantes.

Or les points centraux des projections sont les projections des points centraux ; il suffit donc d'éliminer λ entre l'équation

ci-dessus et celle de la sécante pour avoir l'équation du diamètre de la direction dont le coefficient angulaire est m.

On trouve ainsi :

$$f'_x(x, y) + mf'_y(x, y) = 0.$$

Cette forme élégante et simple est usitée depuis longtemps pour représenter les diamètres dans les sections coniques.

5. *Des tangentes parallèles à une direction donnée.*

Proposons-nous de trouver sur la courbe les points où les tangentes sont parallèles à une direction donnée, dont le coefficient angulaire est m.

Ces tangentes rentrent dans la série des sécantes parallèles à cette direction et, sur chacune d'elles, le point de contact figure doublement parmi les points d'intersection de cette droite avec la courbe. Donc, en vertu du théorème I, ce point de contact appartient au diamètre de la direction de la tangente, et par conséquent :

THÉORÈME VI. — *Le diamètre d'une direction rencontre la courbe proposée aux points où les tangentes sont parallèles à cette direction.*

D'après cela, les points de contact dont il s'agit sont déterminés par les deux équations simultanées

$$f(x, y) = 0,$$
$$f'_x + mf'_y = 0.$$

Ces points sont au nombre de $p(p-1)$, p désignant toujours le degré de la courbe.

6. *Diamètres des différents ordres.*

Sur les sécantes parallèles à une direction donnée, on peut, au lieu de prendre les points centraux du premier ordre, prendre les points centraux du $n^{\text{ième}}$ ordre $(n < p)$; on aura ainsi un diamètre de l'ordre n.

Donc à une direction correspond une série de diamètres, des ordres $1, 2, \ldots, n, \ldots, (p-1)$, au nombre de $(p-1)$.

Il est évident que le diamètre de l'ordre n, pour une direction quelconque, est le diamètre dans le diamètre de l'ordre $(n-1)$. Au moyen de cette observation on forme sans peine les équations des diamètres successifs de la direction dont le coefficient angulaire est m, et l'on a ainsi

$$f'_x + mf'_y = 0,$$

$$f''_{x^2} + 2mf''_{x,y} + m^2 f''_{y^2} = 0,$$

$$f'''_{x^3} + 3mf'''_{x^2,y} + 3m^2 f'''_{x,y^2} + m^3 f'''_{y^3} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En changeant de notation et en se servant des différentielles, on peut représenter le diamètre de l'ordre n par l'équation symbolique

$$\left(\frac{df}{dx} + m\frac{df}{dy}\right)^n = 0,$$

dans le développement de laquelle les exposants df doivent être remplacés par des indices de différentiation correspondants.

Cette équation montre que les diamètres de l'ordre n sont des courbes du degré $(p-n)$.

7. *Diamètres harmoniques.*

Les diamètres de l'ordre le plus élevé, c'est-à-dire de l'ordre $(p-1)$, sont des lignes droites. Leur équation générale peut se mettre sous la forme symbolique

$$\left(\frac{df}{dx} + m\frac{df}{dy}\right)^{p-1} = 0.$$

Nous donnons à ces droites le nom de *diamètres harmoniques*. On peut les définir directement par la considération des centres des moyennes distances.

Si l'on désigne par $\varphi(x, y)$ l'ensemble des termes du degré p du polynôme $f(x, y)$, et par $\psi(x, y)$ l'ensemble des

termes du degré $(p-1)$ du même polynôme, on peut mettre l'équation du diamètre harmonique sous la forme

$$px\varphi(1, m) + (y - mx)\frac{d\varphi(1, m)}{dm} + \psi(1, m) = 0 \quad (*).$$

8. *Propriété projective.*

La propriété projective démontrée pour les points centraux des différents ordres trouve son application dans la théorie des diamètres, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME VII. — *Une courbe algébrique, une direction quelconque et les diamètres des différents ordres de cette direction, forment une figure douée de la propriété projective.*

(*) *Voir* Note I, à la fin du volume.

CHAPITRE III.

DES POINTS REMARQUABLES.

1. *Ce qu'on entend par points remarquables.*

Sous le nom de *points remarquables* d'une courbe, nous désignons les *centres*, les *points d'inflexion*, où les tangentes présentent avec la courbe des contacts d'un ordre élevé, les *points singuliers*, les *pôles de l'infini* et les *points à l'infini*.

Les *centres* et les *pôles de l'infini* sont des points tantôt extérieurs à la courbe, tantôt situés sur la courbe.

Les autres points remarquables sont toujours situés sur la courbe.

Les points à l'infini formeront l'objet du chapitre suivant; nous étudierons dans ce chapitre toutes les autres espèces de points remarquables.

2. *Centres.*

En vertu du théorème IV, toute sécante passant par le centre d'une courbe rencontre cette ligne en un système de points dont les points centraux sont deux à deux symétriques relativement au centre de la courbe. Si le degré de la courbe est pair, le centre fait partie des points centraux; si la courbe est de degré impair, le centre est situé sur la courbe elle-même. Par conséquent :

THÉORÈME VIII. — *Le centre d'une courbe est un centre de tous les diamètres. Si la courbe est de degré impair, son centre est situé sur elle-même et sur tous les diamètres de degrés pairs; si la courbe est de degré pair, son centre est situé sur tous les diamètres de degrés impairs.*

D'après cela, les coordonnées du centre d'une courbe dont l'équation

$$f(x, y) = 0$$

est d'un degré pair, doivent satisfaire aux équations qu'on obtient en égalant à zéro les dérivées partielles d'ordres impairs du polynôme $f(x, y)$.

Et les coordonnées du centre d'une courbe dont l'équation

$$f(x, y) = 0$$

est d'un degré impair, doivent satisfaire aux équations qu'on obtient en égalant à zéro et le polynôme $f(x, y)$ et ses dérivées partielles d'ordres pairs.

3. *Points d'inflexion.*

La tangente en un point d'inflexion étant la position limite d'une sécante qui rencontre la courbe en trois points infiniment voisins, le point d'inflexion est un point central double sur cette droite.

Par conséquent :

THÉORÈME IX.— *La tangente en un point d'inflexion touche en ce point le diamètre du premier ordre de sa direction et coupe en ce point le diamètre du second ordre.*

D'après cela, si m désigne le coefficient angulaire de la tangente en un point d'inflexion, les coordonnées de ce point doivent vérifier les trois équations

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0, \\ f'_x + m f'_y &= 0, \\ f''_{x^2} + 2m f''_{x,y} + m^2 f''_{y^2} &= 0. \end{aligned}$$

Éliminant m, on arrive aux deux équations

$$\left\{ \begin{aligned} f(x, y) &= 0, \\ (f'_y)^2 f''_{x^2} - 2 f'_x f'_y f''_{x,y} + (f'_x)^2 f''_{y^2} &= 0, \end{aligned} \right.$$

des degrés p et $(3p-4)$, qui doivent être vérifiées par les coordonnées de tous les points d'inflexion. D'autres considé-

rations permettent de remplacer la seconde par une équation du degré $3(p-2)$ (*).

Le caractère essentiel des points d'inflexion consiste en ce que la tangente à la courbe en un de ces points présente un contact d'une intimité particulière.

Ce contact est habituellement du second ordre; mais on peut considérer des contacts plus intimes encore et on arrive ainsi à la notion des points d'inflexion de différents ordres.

Nous appellerons *point d'inflexion de l'ordre n* tout point où la courbe présente, avec sa tangente, un contact de l'ordre $(n+1)$.

Les points d'inflexion du premier ordre existent généralement dans les courbes, tandis que les points d'inflexion d'un ordre supérieur ne s'y trouvent qu'exceptionnellement, lorsqu'il existe certaines équations de condition entre les coefficients de l'équation de la courbe.

Le théorème II, relatif aux points centraux, conduit sans difficulté au théorème suivant, relatif aux points d'inflexion :

THÉORÈME X. — *Un point d'inflexion de l'ordre n est situé sur tous les diamètres, d'ordre inférieur à $(n+2)$, de la direction de sa tangente. Dans un diamètre de l'ordre $n' < n$, un point d'inflexion d'ordre n, de la courbe, est un point d'inflexion d'ordre $(n-n')$.*

4. *Points singuliers.*

On distingue habituellement, parmi les points singuliers des courbes algébriques, les *points multiples*, les *points de rebroussement* et les *points isolés;* mais ces diverses espèces ont la propriété commune d'être toujours déterminées par les intersections de plusieurs branches de courbes réelles ou imaginaires.

Sous ce point de vue, les points singuliers sont toujours des

(*) *Voir* le Mémoire publié par M. Otto Hesse dans le tome XXXIV, p. 191, du *Journal de Crelle*. L'analyse de M. Hesse est reproduite dans la Note XII de l'*Algèbre supérieure* de M. A. Serret.

points multiples, et on peut tenir compte du degré de multiplicité pour les classer en différents ordres.

Nous disons qu'un point singulier est du $n^{ième}$ ordre lorsqu'il est déterminé par l'intersection de $(n+1)$ branches de courbes réelles ou imaginaires.

Le théorème II, relatif aux points centraux, conduit sans difficulté au théorème suivant :

THÉORÈME XI. — *Un point singulier de l'ordre n appartient à tous les diamètres, de directions quelconques, d'ordre inférieur à* $(n+1)$. *Dans un diamètre de l'ordre* $n' < n$, *un point singulier d'ordre n de la courbe est un point singulier d'ordre* $(n-n')$.

En particulier les points singuliers du premier ordre appartiennent à tous les diamètres du premier ordre, d'où il résulte que leurs coordonnées doivent satisfaire aux trois équations simultanées

$$f(x, y) = 0,$$
$$f'_x(x, y) = 0,$$
$$f'_y(x, y) = 0.$$

5. *Pôles de l'infini.*

La notion des *pôles de l'infini* dérive spécialement de la théorie générale des diamètres, telle que nous l'avons exposée au chapitre précédent.

Prenons l'équation générale

$$f'_x + mf'_y = 0$$

des diamètres du premier ordre.

Si l'on suppose que le paramètre m prenne toutes les valeurs possibles, l'équation ci-dessus représentera successivement tous les diamètres de la courbe proposée. Il est clair que ces diamètres passent par tous les points dont les coordonnées satisfont aux équations simultanées

$$f'_x(x, y) = 0,$$
$$f'_y(x, y) = 0.$$

Ces équations étant chacune du degré $(p-1)$, les points qu'elles représentent sont au nombre de $(p-1)^2$.

Ces points constituent à proprement parler *l'enveloppe* des diamètres de la courbe. La dénomination de *pôles de l'infini* sera justifiée plus loin (*).

Ce que nous avons dit des centres et des points singuliers des courbes conduit à cette observation, que le centre d'une courbe de degré pair, et les points singuliers d'une courbe de degré quelconque, font nécessairement partie des pôles de l'infini relatifs à cette courbe.

6. *Courbe centrale.*

Les pôles de l'infini, relatifs à tous les diamètres d'une courbe, forment une ligne intimement liée à la courbe proposée et que nous appellerons la *courbe centrale.*

Les diamètres ayant pour équation générale

$$f'_x + mf'_y = 0,$$

les coordonnées de leurs pôles sont déterminées par les deux équations

$$f''_{x^2} + mf''_{x,y} = 0,$$
$$f''_{x,y} + mf''_{y^2} = 0,$$

et l'élimination de m entre ces deux équations donne

$$f''_{x^2} f''_{y^2} = (f''_{x,y})^2$$

pour l'équation de la courbe centrale.

Le degré de cette courbe est $2(p-2)$. Lorsque p surpasse 3, le degré de la courbe centrale devient égal ou supérieur à celui de la courbe proposée; cette courbe ne doit donc avoir d'intérêt réel que dans la théorie des courbes du troisième degré.

Elle jouit pourtant d'une propriété générale que nous allons indiquer.

(*) *Voir* Livre II, Chap. II, n° 16.

Reprenons l'équation

$$f'_x + mf'_y = 0$$

du diamètre de la direction dont le coefficient angulaire est m.

Si, dans ce diamètre, nous prenons le diamètre d'une autre direction, dont le coefficient angulaire est n, nous obtiendrons une nouvelle courbe dont l'équation sera

$$f''_{x^2} + mf''_{x,y} + n\left(f''_{x,y} + mf''_{y^2}\right) = 0.$$

Supposons que m prenne successivement toutes les valeurs possibles, n restant constant : les diverses courbes (du degré $p-2$) représentées par l'équation ci-dessus passeront évidemment par les points, au nombre de $(p-2)^2$, dont les coordonnées vérifient les deux équations simultanées

$$\left\{\begin{array}{l} f''_{x^2} + nf''_{x,y} = 0, \\ f''_{x,y} + nf''_{y^2} = 0. \end{array}\right.$$

Le groupe de points ainsi obtenu se déforme et se déplace lorsque n varie. Pour obtenir son lieu géométrique, il suffit d'éliminer n entre les deux équations précédentes; or on arrive, de cette manière, à l'équation même

$$f''_{x^2} f''_{y^2} = \left(f''_{x,y}\right)^2$$

de la courbe centrale.

Par conséquent :

Théorème XII. — *Si, relativement à tout diamètre du premier ordre d'une courbe géométrique d'un degré quelconque, on prend le diamètre du premier ordre d'une direction arbitraire, mais fixe, on obtient des courbes convergentes entre elles* (courbes pivotantes); *et, si l'on fait varier la direction fixe, le lieu géométrique des points de convergence* (pivots) *est précisément la* courbe centrale *relative à la courbe proposée.*

CHAPITRE IV.

DES BRANCHES INFINIES.

1. *Détermination analytique des points à l'infini.*

Une courbe algébrique présente généralement des branches qui se développent au delà de toute zone limitée, et qu'on appelle *branches infinies*.

L'infini du plan se comportant analytiquement comme une ligne droite, une courbe du degré p présente toujours p points à l'infini, lesquels peuvent, en totalité ou en partie, être imaginaires.

Chacun d'eux appartient à une branche infinie dont la direction limite peut être représentée par celle d'une droite menée par l'origine des coordonnées.

Soit

$$f(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe du degré p.

Le polynôme $f(x, y)$ présente une partie homogène $\varphi(x, y)$, laquelle est composée de l'ensemble des termes du degré p.

On posera

$$\varphi(x, y) = x^p \varphi\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{y}{x} = z,$$

$$\varphi\left(1, \frac{y}{x}\right) = \psi(z),$$

$$\psi(z) = 0,$$

et cette dernière équation fera connaître les directions limites des branches infinies.

2. *Différentes espèces de branches infinies.*

Considérons la tangente en un point d'une branche infinie, et supposons que le point de contact s'éloigne indéfiniment sur cette branche; nous obtiendrons à la limite la *tangente à l'infini.*

Deux cas peuvent se présenter:

Ou la position limite de la tangente est assignable dans le plan et déterminée de direction, ou la tangente va complétement à l'infini, sans offrir de direction déterminée.

Dans le premier cas, la branche de courbe est *hyperbolique* et la tangente à l'infini prend le nom d'*asymptote.*

Dans le second cas, la branche est *parabolique.*

3. *Points hyperboliques et points paraboliques.*

Lorsque la direction d'un point à l'infini se présente comme racine simple de l'équation

$$\psi(z) = 0,$$

la branche infinie correspondante est toujours hyperbolique, et nous donnons au point à l'infini lui-même le nom de *point hyperbolique.*

Lorsque la direction du point à l'infini se présente comme racine multiple de l'équation

$$\psi(z) = 0,$$

ce point appartient généralement à une branche parabolique, et quelquefois à plusieurs branches hyperboliques à asymptotes parallèles ou même coïncidentes. Dans tous les cas nous lui donnons la dénomination de *point parabolique.* Il peut, dans des cas très-rares, se présenter comme point isolé.

Les *points paraboliques* sont de véritables points singuliers situés à l'infini, et le coefficient angulaire de la tangente en un de ces points se présente sous forme indéterminée, en tant qu'on se borne à l'emploi des dérivées partielles du premier ordre de l'équation de la courbe.

On voit par là que les points hyperboliques existent généralement dans les courbes, tandis que les points paraboliques

ne s'y trouvent qu'exceptionnellement lorsqu'il existe une équation de condition, ou plusieurs équations de condition, entre les coefficients de l'équation de la courbe.

Nous appliquerons les épithètes d'*hyperboliques* et de *paraboliques* aux directions mêmes sur lesquelles se trouveront les deux espèces de points à l'infini dont nous venons de parler.

4. *Diamètres des directions hyperboliques.*

Si l'on mène une série de sécantes parallèles à une asymptote, le point hyperbolique correspondant fera constamment partie des points centraux des différents ordres relatifs à chaque sécante, et conséquemment il appartiendra aux diamètres de tous ordres de sa direction.

Sur la sécante qui coïncide avec l'asymptote, le point hyperbolique joue le rôle d'un point central double de tous les ordres, et par conséquent l'asymptote de la courbe est asymptote de tous les diamètres.

De là ce théorème :

THÉORÈME XIII. — *L'asymptote d'une branche hyperbolique est asymptote des diamètres de tous ordres de sa propre direction, et coïncide avec le diamètre harmonique de cette direction* (*).

5. *Détermination analytique des asymptotes.*

On peut déduire du théorème précédent la détermination analytique des asymptotes.

Nous avons vu que l'équation du diamètre harmonique peut être mise sous la forme

$$xp\varphi(1, m) + (y - mx)\frac{d\varphi(1, m)}{dm} + \psi(1, m) = 0,$$

en désignant par $\varphi(x, y)$ l'ensemble des termes du degré p, et par $\psi(x, y)$ l'ensemble des termes du degré $(p-1)$ dans l'équation de la courbe.

(*) *Voir* Note II, à la fin du volume.

Les coefficients angulaires des directions des points à l'infini de la courbe peuvent s'obtenir en remplaçant y par mx et en faisant croître x indéfiniment dans l'équation précédente.

On arrive ainsi à l'équation

$$\varphi(1, m) = 0$$

qui détermine les valeurs de m.

Pour ces valeurs, l'équation du diamètre harmonique se réduit à

$$y = mx - \frac{\psi(1, m)}{\varphi'_m(1, m)}.$$

Si donc on porte dans cette équation les différentes valeurs de m, on aura les équations des asymptotes.

Lorsque l'ordonnée à l'origine $\frac{\psi(1, m)}{\varphi'(1, m)}$ prendra une valeur infinie, il n'y aura pas d'asymptote, et la branche de courbe sera parabolique.

LIVRE II.

POLES ET POLAIRES. — POLAIRES DIAMÉTRALES. — COURBES PIVOTANTES.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME DE POINTS-RACINES. — POINTS CONJUGUÉS ET POINTS HARMONIQUES.

1. *Définition géométrique des points conjugués.*

Considérons un système de points en ligne droite,

$$M_1, \quad M_2, \ldots, \quad M_p,$$

et leurs points centraux

$$N_1, \quad N_2, \ldots, \quad N_{p-1}.$$

Considérons en outre un point fixe S et prenons un point variable V.

Les deux produits

$$M_1V \times M_2V \times \ldots \times M_pV,$$
$$N_1V \times N_2V \times \ldots \times N_{p-1}V \times SV.$$

deviennent égaux pour certaines positions du point mobile V.

Nous appellerons ces positions les points *conjugués* de S, relativement au système donné.

2. *Définition analytique.*

Si les points donnés sont les points-racines d'une équation algébrique, du degré p,

$$f(x) = A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_{p-1} x + A_p = 0,$$

leurs points centraux sont les points-racines de l'équation dérivée

$$f'(x) = pA_0x^{p-1} + (p-1)A_1x^{p-2} + \ldots + A_{p-1} = 0.$$

En désignant par α l'abscisse du point S, et par x celle du point V, les deux produits désignés plus haut ont pour expressions analytiques

$$\frac{f(x)}{A_0},$$

et

$$\frac{(x-\alpha)f'(x)}{pA_0}.$$

Par conséquent les abscisses des points conjugués de S sont déterminées par l'équation

$$(x-\alpha)f'(x) - pf(x) = 0.$$

Cette équation, en apparence du degré p, n'est en réalité que du degré $(p-1)$, le coefficient du terme du degré p étant nécessairement égal à zéro.

De là une définition analytique des points conjugués qui n'exige pas, comme la définition géométrique précédente, que les points donnés soient tous réels.

3. *Nouvelles définitions géométriques.*

L'équation

$$(x-\alpha)f'(x) - pf(x) = 0$$

peut être mise sous la forme

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{A_0(x-\alpha)^p}\right] = 0,$$

ou, ce qui revient au même, sous la forme

$$\frac{f(x)}{A_0(x-\alpha)^p} = \text{maximum ou minimum.}$$

Or, on a

$$\pm\frac{f(x)}{A_0} = VM_1 \times VM_2 \times \ldots \times VM_p,$$

et

$$\pm(x-\alpha) = VS.$$

Par conséquent l'équation ci-dessus correspond à la formule géométrique

$$\frac{VM_1 \times VM_2 \times \ldots \times VM_p}{\overline{VS}^p} = \text{maximum}.$$

De là cette nouvelle définition géométrique des points conjugués :

Les conjugués d'un point donné, relativement à un système de p points, sont tels, que le produit des distances de l'un quelconque d'entre eux aux points du système, divisé par la puissance $p^{ième}$ de la distance de ce point au point donné, donne un quotient maximum.

Cette définition ne repose pas sur la notion des points conjugués.

Si maintenant nous désignons par $x_1, x_2, \ldots, x^p$ les abscisses des points donnés, nous pourrons mettre l'équation aux points conjugués de S sous la forme

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_p)}{(x-\alpha)^p}\right] = 0,$$

et, par suite, la transformer comme il suit :

$$\frac{p}{(\alpha - x)} = \frac{1}{x_1 - x} + \frac{1}{x_2 - x} + \ldots + \frac{1}{x_p - x}.$$

Cette dernière équation correspond à la formule géométrique

$$\frac{p}{VS} = \frac{1}{VM_1} + \frac{1}{VM_2} + \ldots + \frac{1}{VM_p},$$

laquelle exprime que le segment VS est la *moyenne harmonique* entre les segments $VM_1, VM_2, \ldots, VM_p$, d'où il résulte que le point S est le *centre des moyennes harmoniques* (*) du système donné relativement au point V; nous l'appellerons simplement l'*harmonique* de V.

(*) Cette dénomination est due à M. Poncelet (Mémoire sur les centres des moyennes harmoniques, *Journal de Crelle*, t. III, année 1828, p. 229). Chacun des segments $VM_1, VM_2, \ldots, VM_p$ doit être considéré comme positif ou comme négatif, suivant le sens dans lequel il est dirigé.

De là cette troisième définition géométrique des points conjugués :

Les conjugués d'un point donné, relativement à un système de p points, sont tels, que le centre des moyennes harmoniques du système relativement à chacun d'eux n'est autre que le point donné.

Toutes ces définitions sont équivalentes.

4. *Des conjugués d'un groupe de points.*

Lorsque l'équation du degré p

$$f(x) = 0$$

a donné naissance à l'équation du degré $(p-1)$

$$f_{(1)}(x) = (x-\alpha)f'(x) - pf(x) = 0$$

qui représente les conjugués du point α, le système de points déterminés par cette dernière équation peut donner naissance aux conjugués d'un point β, déterminés par l'équation du degré $(p-2)$

$$f_{(2)}(x) = (x-\beta)f'_{(1)}(x) - (p-1)f_{(1)}(x) = 0.$$

Relativement au système de points représentés par cette nouvelle équation, prenons les conjugués d'un point γ, nous aurons l'équation du degré $(p-3)$

$$f_{(3)}(x) = (x-\gamma)f'_{(2)}(x) - (p-2)f_{(2)}(x).$$

On peut continuer ainsi, en considérant successivement les abscisses α, β, $\gamma, \ldots$, λ d'un groupe de n points pris sur la droite, et on arrive à une équation du degré $(p-n)$

$$f_{(n)}(x) = 0,$$

laquelle représente un système de $(p-n)$ points que nous appellerons les *conjugués* du groupe considéré.

L'équation

$$f_{(2)}(x) = 0$$

se développe sous la forme suivante :

$$(x-\alpha)(x-\beta)f''(x) - (p-1)[(x-\alpha)+(x-\beta)]f'(x) + p(p-1)f(x) = 0.$$

Elle est symétrique en α et β. Si donc, au lieu de prendre d'abord les conjugués de α et ensuite les conjugués de β, on avait fait l'inverse, le résultat algébrique aurait été le même.

Cette observation se généralise aisément et l'on arrive à la loi suivante :

THÉORÈME XIV. — *Si l'on a à prendre successivement les conjugués de n points, relativement à un système de points quelconques, en nombre supérieur à n, l'ordre suivi dans les opérations sera sans influence sur le résultat.*

Par conséquent, les conjugués d'un groupe de n points sont entièrement indépendants de l'ordre dans lequel on considère les points de ce groupe. Le groupe de points peut simplement être donné comme l'ensemble des points-racines d'une équation algébrique

$$\theta(x) = 0.$$

5. *Forme développée de l'équation aux conjugués d'un groupe de n points.*

La loi de formation que nous avons indiquée au numéro précédent pour les fonctions successives $f_{(1)}(x)$, $f_{(2)}(x)$,..., permet d'obtenir ces fonctions sous des formes développées, en ne faisant usage que de la fonction $f(x)$ et de ses dérivées successives.

En effectuant les calculs et en faisant les réductions qui se présentent, on trouve successivement :

$$f_{(1)}(x) = (x-\alpha)f'(x) - pf(x),$$

$$f_{(2)}(x) = (x-\alpha)(x-\beta)f''(x) - (p-1)\left|\begin{array}{r}(x-\alpha)\\+(x-\beta)\end{array}\right| f'(x)$$
$$+ p(p-1)f(x),$$

$$f_{(3)}(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)f'''(x) - (p-2)\left|\begin{array}{r}(x-\alpha)(x-\beta)\\+(x-\beta)(x-\gamma)\\+x-\gamma)(x-\alpha)\end{array}\right| f''(x)$$
$$+ (p-1)(p-2)\left|\begin{array}{r}(x-\alpha)\\+(x-\beta)\\+(x-\gamma)\end{array}\right| f'(x)$$
$$- p(p-1)(p-2)f(x).$$

La loi de formation est évidente, et l'on peut poser la formule

$$f_{(n)}(x) = \sum_0^n (-1)^t C_t^{p+t-n} P_t S_{n-t} f^{(n-t)}(x),$$

dans laquelle $\sum_0^n$ indique une sommation pour les valeurs entières successives de zéro à n, attribuées à l'indice t;

C_t^{p+t-n} indique le nombre des combinaisons que l'on peut faire avec $(p+t-n)$ objets pris t à t; $C_0^{p+t-n} = 1$;

P_t indique le nombre des permutations que l'on peut faire avec t objets; $P_0 = 1$;

S_{n-t} indique la somme des produits $(n-t)$ à $(n-t)$ des facteurs binômes $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, ..., $(x-\lambda)$, correspondant au groupe de points; $S_0 = 1$;

$f^{(n-t)}(x)$ indique la dérivée de l'ordre $(n-t)$ de $f(x)$.

Si le groupe donné se compose des points-racines d'une équation

$$\theta(x) = 0$$

du degré n, on démontre aisément que

$$P_t S_{n-t} = \theta^{(t)}(x),$$

en supposant que le terme en x^n, dans $\theta(x)$, ait pour coefficient l'unité (*).

La valeur de $f_{(n)}(x)$ peut alors être mise sous la forme

$$f_{(n)}(x) = \sum_0^n (-1)^t C_t^{p+t-n} \theta^{(t)}(x) f^{(n-t)}(x);$$

et bien que le produit $\theta^{(t)}(x) f^{(n-t)}(x)$, correspondant à un terme quelconque du deuxième membre, soit du degré p en x, le polynôme $f_{(n)}(x)$ n'est cependant que du degré $(p-n)$, comme il résulte de ce qui a été dit au n° 4.

6. *Conjugués des différents ordres d'un même point.*

Nous appellerons *conjugués de l'ordre* n (**) $(n < p)$ d'un

(*) *Voir* Note III, à la fin du volume.

(**) Ces points ont été étudiés, sous le nom de *centres harmoniques*, et à un autre point de vue, par M. de Jonquières. *Voir* Mémoire sur la Théorie des pôles et polaires, etc. (*Journal de M. Liouville*, août 1857).

point, les conjugués d'un groupe composé de n points identiques avec le point que l'on considère.

L'équation

$$f(x)=0$$

représentant toujours le système des points donnés, nous représenterons par

$$f_n(x)=0$$

l'équation aux conjugués de l'ordre n.

Soit α l'abscisse du point auquel ces conjugués se rapportent; le groupe de n points, dont nous avons parlé ci-dessus, se composera du point-racine multiple de l'équation

$$(x-\alpha)^n=0,$$

et l'expression développée de $f_n(x)$, déduite de la formule trouvée au n° 5, sera

$$f_n(x)=\sum_0^n(-1)^t C_t^{p+t-n} C_t^n P_t f^{(n-t)}(x)(x-\alpha)^{n-t}.$$

Cette formule donne successivement

$$f_1(x)=(x-\alpha)f'(x)-pf(x),$$
$$f_2(x)=(x-\alpha)^2f''(x)-2(p-1)(x-\alpha)f'(x)+p(p-1)f(x),$$
$$f_3(x)=(x-\alpha)^3f'''(x)-3(p-2)(x-\alpha)^2f''(x)$$
$$+3(p-1)(p-2)(x-\alpha)f'(x)-p(p-1)(p-2)f(x).$$

Dans l'expression de $f_n(x)$ on peut, sans changer les limites au signe Σ, remplacer l'indice t par $n-t$. On ne fait ainsi qu'intervertir l'ordre des termes, et l'on a

$$f_n(x)=\sum_0^n(-1)^{n-t} C_{n-t}^{p-t} C_{n-t}^n P_{n-t}(x-\alpha)^t f^{(t)}(x).$$

D'ailleurs

$$C_{n-t}^n=\frac{P_n}{P_t\times P_{n-t}} \quad \text{et} \quad C_{n-t}^{p-t}=C_{p-n}^{p-t};$$

nous pouvons donc écrire

$$f_n(x)=P_n\sum_0^n(-1)^{n-t} C_{p-n}^{p-t}\frac{1}{P_t}(x-\alpha)^t f^{(t)}(x).$$

C'est de cette dernière formule que nous ferons usage dans ce qui va suivre.

7. *Autre forme de l'équation aux points conjugués de l'ordre n.*

On peut donner à l'équation aux points conjugués de l'ordre n une forme très-différente de celle que nous venons de faire connaître.

Remarquons en effet que le polynôme $f_n(x)$, étant du degré $(p-n)$ en x, peut être mis sous la forme

$$f_n(x) = \sum_0^{p-n} \varphi_t(\alpha)(\alpha - x)^t,$$

φ_t désignant un polynôme entier et rationnel en α, variable d'un terme à l'autre, et qu'il s'agit de déterminer.

$f_n(x)$ est lié à $f_{n-1}(x)$ par la relation fondamentale

$$f_n(x) = (x-\alpha)f'_{n-1}(x) - (p-n+1)f_{n-1}(x),$$

d'où l'on déduit, par t dérivations successives,

$$f_n^{(t)}(x) = (x-\alpha)f_{n-1}^{(t+1)}(x) - (p-n-t+1)f_{n-1}^{(t)}(x).$$

En faisant $x=\alpha$ dans cette formule, on trouve

$$f_n^{(t)}(x)_{(x=\alpha)} = -(p-n-t+1)f_{n-1}^{(t)}(x)_{(x=\alpha)},$$

d'où l'on tire

$$f_n^{(t)}(x)_{(x=\alpha)} = (-1)^n(p-n-t+1)(p-n-t+2)\ldots(p-t)f^{(t)}(x)_{(x=\alpha)},$$

ou, plus simplement,

$$f_n^{(t)}(x)_{(x=\alpha)} = (-1)^n C_n^{p-t} P_n f^{(t)}(\alpha).$$

D'autre part, l'équation aux fonctions φ donne, sans difficulté,

$$f_n^{(t)}(x)_{x=\alpha} = (-1)^t P_t \varphi_t(\alpha).$$

En égalant le second membre de cette équation avec celui de la précédente, on a

$$\varphi_t(\alpha) = (-1)^{n-t} C_n^{p-t} P_n \frac{1}{P_t} f^{(t)}(\alpha),$$

et par suite

$$f_n(x) = P_n \sum_0^{p-n} (-1)^{n-t} C_n^{p-t} \frac{1}{P_t} (\alpha - x)^t f^{(t)}(x).$$

On peut remplacer $(-1)^{n-t}$ par $(-1)^p(-1)^{p-n-t}$, et l'on trouve définitivement

$$f_n(x) = (-1)^p P_n \sum_0^{p-n} (-1)^{p-n-t} C_n^{p-t} \frac{1}{P_t} (\alpha - x)^t f^{(t)}(x).$$

8. *Conséquence remarquable des formules précédentes.*

Il résulte de ce que nous venons d'exposer, aux n°s 6 et 7, que l'équation aux points conjugués de l'ordre n peut être mise indifféremment sous l'une ou sous l'autre des deux formes suivantes :

$$\begin{cases} \sum_0^n (-1)^{n-t} C_{p-n}^{p-t} \frac{1}{P_t} (x-\alpha)^t f^{(t)}(x) = 0, \\ \sum_0^{p-n} (-1)^{p-n-t} C_n^{p-t} \frac{1}{P_t} (\alpha - x)^t f^{(t)}(\alpha) = 0. \end{cases}$$

Si, dans ce système, on change n en $p-n$, on trouve

$$\begin{cases} \sum_0^{p-n} (-1)^{p-n-t} C_n^{p-t} \frac{1}{P_t} (x-\alpha)^t f^{(t)}(x) = 0, \\ \sum_0^n (-1)^{n-t} C_{p-n}^{p-t} \frac{1}{P_t} (\alpha - x)^t f^{(t)}(x) = 0, \end{cases}$$

pour les deux formes de l'équation aux points conjugués de l'ordre $(p-n)$.

En comparant les deux systèmes précédents, on voit que chacun d'eux reproduit l'autre par la simple permutation des lettres α et x. Si donc on désigne par

$$F_n(x, \alpha) = 0$$

et

$$F_{p-n}(x, \alpha) = 0$$

les équations aux points conjugués des ordres n et $p-n$, les deux équations

$$F_n(x, \alpha) = 0,$$
$$F_{p-n}(\alpha, x) = 0$$

sont identiques.

De là ce théorème :

THÉORÈME XV. — *Si un point est conjugué d'ordre n d'un autre point, relativement à un système de p points donnés, le second point conjugué est conjugué d'ordre $p-n$ du premier, relativement au même système.*

9. *Groupes associés.*

L'équation

$$F_n(x, \alpha) = 0$$

est du degré $(p-n)$ en x et du degré n en α. Donc les conjugués d'ordre n d'un même point forment un groupe de $(p-n)$ points, auquel correspond un groupe de n points admettant chacun pour conjugués d'ordre n les points du premier groupe.

D'après le théorème XV, chaque point du premier groupe admet pour conjugués d'ordre $(p-n)$ l'ensemble des points du second groupe.

Nous désignerons par G_{p-n} et G_n ces deux groupes, de $(p-n)$ et de n points, que nous appellerons *groupes associés.*

10. *Points harmoniques.*

D'après ce que nous avons vu au n° 7, l'équation au point conjugué de l'ordre $(p-1)$ peut se mettre sous la forme linéaire

$$(\alpha - x) f'(\alpha) - pf(\alpha) = 0.$$

Le point unique déterminé par cette équation n'est autre que l'harmonique du point S dont l'abscisse est α, relativement au système donné.

Il y a d'ailleurs d'autres points que S qui admettent pour harmonique le point dont il s'agit; ce sont précisément les conjugués du premier ordre de ce dernier point.

Un point et ses conjugués du premier ordre, ou, en d'autres termes, une série de points, en nombre égal à $p-1$, et leur harmonique commun, constituent deux groupes associés.

11. *Propriété perspective.*

Considérons la figure formée par le système des points donnés, un autre point S et les conjugués de ce point. Cette figure se définit analytiquement :

1° Par l'équation

$$f(x)=0,$$

relative aux points donnés;

2° Par l'abscisse α du point S;

3° Par l'équation

$$(x-\alpha)f'(x)-pf(x)=0,$$

relative aux conjugués du point S.

Sur une droite quelconque, nous formerons une nouvelle figure déduite de la précédente au moyen d'une transformation telle, que la nouvelle abscisse y d'un point soit liée à l'abscisse x du point correspondant par la relation

$$x=\frac{ay+b}{cy+d},$$

dans laquelle a, b, c, d sont des constantes.

Une telle transformation peut être assimilée, géométriquement, à une transformation *perspective*.

Voyons maintenant quelle sera l'expression analytique de la nouvelle figure.

Pour trouver l'équation aux transformés des points donnés, ramenée à la forme entière, il suffit de poser

$$f(x)=\frac{\varphi(y)}{(cy+d)^p},$$

et d'égaler à zéro le numérateur du second membre, ce qui donne l'équation

$$\varphi(y)=0.$$

La nouvelle abscisse β du transformé du point S est déterminée

par la relation

$$\alpha = \frac{a\beta + b}{c\beta + d}.$$

Reste à transformer l'équation aux points conjugués; or on a

$$x - \alpha = \frac{(ad - bc)}{(cy + d)} \frac{(y - \beta)}{(c\beta + d)},$$

$$f(x) = \frac{\varphi(y)}{cy + d} \frac{1}{(cy + d)^{p-1}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(cy + d)^2}{ad - bc},$$

$$f'(x) = \frac{\varphi'(y)(cy + d) - pc\varphi(y)}{ad - bc} \frac{1}{(cy - d)^{p-1}}.$$

Par la substitution de ces valeurs, l'équation aux points conjugués donne, réductions faites, pour sa transformée,

$$(y - \beta)\varphi'(y) - p\varphi(y) = 0.$$

C'est précisément l'équation par laquelle on déterminerait les conjugués du transformé de S, relativement aux transformés des points donnés.

Donc :

Théorème XVI. — *Un système de points en ligne droite, un autre point et ses conjugués relatifs au système donné, forment une figure qui donne, par la transformation perspective, une figure de même nature.*

Ce théorème s'étend évidemment à la figure formée par un système donné, un groupe de points et les conjugués de ce groupe, et aussi à la figure formée par un système donné et par deux groupes associés.

Nous terminerons ce chapitre en passant en revue quelques cas particuliers.

12. *Cas où deux ou plusieurs des points donnés coïncident.*

Si l'on suppose que n des points donnés coïncident, leur abscisse commune

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n$$

étant racine, au degré n de multiplicité, de l'équation

$$f(x) = 0,$$

et au degré $(n-1)$ de multiplicité de l'équation

$$f'(x) = 0,$$

est évidemment racine, au degré $(n-1)$ de multiplicité, de l'équation

$$(x-\alpha)f'(x) - pf(x) = 0.$$

Donc :

THÉORÈME XVII. — *Tout point multiple de l'ordre n, parmi les points donnés, est un point multiple de l'ordre* $(n-1)$ *parmi les conjugués d'un point quelconque.*

13. *Cas où le point* S *coïncide avec un des points donnés.*

Si le point S coïncide avec un des points donnés, on peut poser

$$f(x) = (x-\alpha)\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction du degré $(p-1)$. L'équation aux points conjugués peut alors être mise sous la forme

$$(x-\alpha)[(x-\alpha)\varphi'(x) - (p-1)\varphi(x)] = 0,$$

et se décompose en ces deux autres

$$\left\{\begin{array}{l} x = \alpha, \\ (x-\alpha)\varphi'(x) - (p-1)\varphi(x) = 0. \end{array}\right.$$

Par conséquent :

Chaque point du système donné fait partie de ses propres conjugués; les autres conjugués de ce point sont précisément ceux relatifs au système qu'on obtient en supprimant ce point parmi les points donnés;

et, plus généralement :

THÉORÈME XVIII. — *Un point, du degré n de multiplicité parmi les points donnés, figure au degré n de multiplicité parmi ses propres conjugués. Les autres conjugués de ce point*

sont précisément ceux relatifs au système qu'on obtient en supprimant le point multiple parmi les points donnés.

14. *Cas où le point* S *va à l'infini.*

Lorsque S va à l'infini, l'équation aux points conjugués se réduit à

$$f'(x) = 0,$$

c'est-à-dire à l'équation des points centraux du système.

Donc :

THÉORÈME XIX. — *Les conjugués de l'infini sont les points centraux du système donné.*

CHAPITRE II.

POLES ET POLAIRES.

1. *Des pôles et des polaires dans les coniques.*

Considérons une section conique et un point situé dans son plan. On peut, sur une sécante quelconque issue du point donné, prendre le *conjugué harmonique* de ce dernier point relativement aux deux points d'intersection de la sécante et de la courbe. Lorsque la sécante pivote autour du point fixe, le conjugué harmonique se déplace; son lieu géométrique est une ligne droite que l'on appelle *polaire* du point fixe, et ce dernier prend le nom de *pôle* de la droite.

La polaire d'un point quelconque d'une droite pivote constamment autour du pôle de cette droite.

Et le pôle d'une droite quelconque pivotant autour du point fixe engendre la polaire de ce point.

Telles sont les propriétés essentielles des pôles et des polaires, dont la théorie présente un grand intérêt pour l'étude des sections coniques.

2. *Méthode de généralisation.*

La théorie des pôles et des polaires peut être étendue aux courbes algébriques de tous les degrés.

Considérons une courbe géométrique du degré p et un point fixe situé dans son plan. On peut, sur une sécante quelconque, issue du point donné, prendre les conjugués d'ordre n de ce dernier relativement aux points d'intersection de la sécante et de la courbe. On détermine ainsi une ligne, lieu

géométrique des conjugués du point fixe, que nous appellerons la *polaire d'ordre n* de ce point (*).

La lettre n pouvant prendre toutes les valeurs entières, de 1 à $(p-1)$, on voit qu'une courbe du degré p donne naissance à $p-1$ espèces de polaires.

On pressent d'ailleurs que le degré de la polaire de l'ordre n doit être égal à $p-n$, puisque cette courbe est coupée en $p-n$ points par les sécantes issues du point fixe.

Parmi ces polaires, la première, de l'ordre 1, et la dernière, de l'ordre $p-1$, sont les seules qu'il importe de considérer quand p est égal à 2, c'est-à-dire quand la courbe donnée est une section conique. Dans ce cas elles coïncident avec la polaire qui a été définie au n° 1 de ce chapitre.

Nous commencerons par étudier spécialement ces deux espèces de polaires auxquelles nous donnerons, dans ce qui va suivre, les noms de *polaire conjuguée* et de *polaire harmonique*.

3. *Équation générale des polaires conjuguées.*

Soit

$$f(x, y) = 0$$

l'équation entière et rationnelle d'une courbe algébrique du degré p, et soient α, β les coordonnées du point dont on veut prendre la polaire conjuguée.

L'équation

$$y - \beta = \lambda(x - \alpha),$$

dans laquelle λ représente un paramètre variable, représentera la sécante mobile.

Pour une valeur quelconque de λ, projetons sur l'axe des x les points d'intersection de la sécante et de la courbe, le point fixe et ses conjugués. Les coordonnées de ces derniers points seront déterminées par l'équation

$$(x-\alpha)\left(\frac{df}{dx} + \lambda\frac{df}{dy}\right) - pf = 0,$$

(*) Les propriétés des polaires ont été étudiées d'abord par Bobillier (Théorèmes sur les polaires successives, *Annales de Gergonne*; Nîmes, 1828-1829), puis, à un autre point de vue, par Grassmann (Theorie der Centralen, *Journal de Crelle*; Berlin, 1842).

et si nous éliminons λ entre cette équation et celle de la droite mobile, nous aurons pour équation de la polaire conjuguée :

$$(x-\alpha)\frac{df(x,y)}{dx}+(y-\beta)\frac{df(x,y)}{dy}-pf(x,y)=0.$$

Cette courbe est du degré $(p-1)$; le point (α, β) est son *pôle conjugué.*

4. *Des tangentes à la courbe donnée issues d'un point extérieur.*

Proposons-nous de trouver sur la courbe donnée les points où aboutissent les tangentes issues du point dont les coordonnées sont α, β.

Ces tangentes rentrent toutes dans la série des sécantes issues du point fixe, et chaque point de contact figure doublement parmi les points d'intersection de sa tangente avec la courbe. Donc, en vertu du théorème XVII, le point de contact appartient à la polaire du point P.

Par conséquent :

THÉORÈME XX. — *La polaire d'un point rencontre la courbe proposée aux points où aboutissent les tangentes issues de ce point.*

L'équation de la polaire est précisément celle qu'on rencontre, en géométrie analytique, lorsqu'on veut déterminer les $p(p-1)$ points de contact de la courbe avec les tangentes issues d'un point extérieur.

5. *Équations générales aux pôles harmoniques.*

Au lieu de prendre sur la sécante mobile

$$y-\beta=\lambda(x-\alpha)$$

les conjuguées du point (α, β), prenons l'harmonique de ce point. En projetant la figure sur l'axe des x, on trouvera

$$(\alpha-x)\left[\frac{df(\alpha,\beta)}{d\alpha}+\lambda\frac{df(\alpha,\beta)}{d\beta}\right]-pf(\alpha,\beta)=0;$$

en éliminant λ entre cette équation et celle de la sécante, on trouvera l'équation de la polaire harmonique

$$(\alpha - x)\frac{df(\alpha,\beta)}{d\alpha} + (\beta - y)\frac{df(\alpha,\beta)}{d\beta} - pf(\alpha,\beta) = 0.$$

Cette équation linéaire, contenant deux paramètres α et β, peut être regardée comme l'équation générale d'une droite du plan.

La droite représentée par l'équation

$$ax + by + c = 0$$

peut donc toujours être regardée comme la polaire harmonique de certains points du plan, dont les coordonnées (α, β), réelles ou imaginaires, sont déterminées par les équations

$$\frac{1}{a}f'_\alpha(\alpha,\beta) = \frac{1}{b}f'_\beta(\alpha,\beta) = -\frac{1}{c}[\alpha f'_\alpha(\alpha,\beta) + \beta f'_\beta(\alpha,\beta) - pf(\alpha,\beta)].$$

Ces points, au nombre de $(p-1)^2$, sont les *pôles harmoniques* de la droite.

6. *Corrélation entre les pôles et les polaires conjugués et harmoniques.*

Les considérations exposées aux n°s 3 et 5 déterminent la *polaire conjuguée* d'un point et les *pôles harmoniques* d'une droite.

Supposons que le point (α, β) décrive la droite définie par l'équation

$$a\alpha + b\beta + c = 0,$$

la polaire conjuguée de ce point aura pour équation

$$(x - \alpha)\frac{df(x,y)}{dx} + \left(y + \frac{a\alpha + c}{b}\right)\frac{df(x,y)}{dy} - pf(x,y) = 0.$$

Elle passe donc par tous les points dont les coordonnées x, y satisfont aux équations simultanées :

$$\frac{1}{a}\frac{df(x,y)}{dx} = \frac{1}{b}\frac{df(x,y)}{dy}$$
$$= -\frac{1}{c}\left[x\frac{df(x,y)}{dx} + y\frac{df(x,y)}{dy} - pf(x,y)\right].$$

Ces points sont précisément les pôles harmoniques de la droite.

Donc :

THÉORÈME XXI. — *Lorsqu'un point se meut sur une droite, la polaire conjuguée de ce point pivote autour des pôles harmoniques de cette droite.*

Réciproquement :

THÉORÈME XXII. — *Lorsqu'une droite pivote autour d'un point, les pôles harmoniques de cette droite se meuvent sur la polaire conjuguée de ce point.*

Ces théorèmes établissent une *corrélation* entre les pôles et les polaires, conjugués et harmoniques, relatifs à une courbe géométrique d'un degré quelconque. Lorsque la courbe est une conique, cette corrélation se traduit par les propriétés fondamentales que nous avons énoncées au commencement de ce chapitre; et comme, dans ce cas, la polaire conjuguée ne diffère pas de la polaire harmonique, la corrélation prend un caractère de symétrie et devient véritablement *réciproque.*

7. *Polaires des différents ordres.*

Au lieu de prendre, sur la sécante issue du point (α, β), les conjugués du premier ordre du point fixe, on peut prendre les conjuguées de l'ordre n; on détermine ainsi la *polaire de l'ordre n.*

D'après la définition des points conjugués des différents ordres, la polaire de l'ordre n d'un point, relativement à une courbe donnée, est la polaire conjuguée de ce point relativement à sa polaire de l'ordre $(n-1)$.

Il en résulte que toute polaire du second ordre doit être une courbe du degré $(p-2)$; que toute polaire du troisième ordre doit être une courbe du degré $(p-3)$, et généralement que les polaires de l'ordre n doivent être des courbes du degré $(p-n)$, ainsi que nous l'avons entrevu au commencement de ce chapitre.

La polaire de l'ordre $(p-1)$ d'un point quelconque est une

ligne droite qui ne diffère pas de la polaire harmonique dont nous avons déjà parlé.

Soit toujours

$$f(x, y) = 0$$

l'équation du degré p de la courbe donnée.

Désignons par (α, β) les coordonnées du point dont on veut prendre la polaire d'ordre n.

L'équation de la sécante mobile passant par ce point peut être mise sous la forme

$$(y - \beta) = \lambda (x - a).$$

Pour une valeur quelconque de λ, projetons sur l'axe des x les points d'intersection de la sécante et de la courbe, le point fixe et ses conjugués de l'ordre n. En vertu de la propriété projective démontrée plus haut, nous déterminerons les abscisses des points conjugués de l'ordre n, par l'équation

$$\sum_0^n (-1)^{n-t} C_{p-n}^{p-t} \frac{1}{P_t} (x - \alpha)^t f^{(t)}(x, y) = 0,$$

dans laquelle y doit être regardé comme une fonction de x déterminée par l'équation même de la sécante. Le premier membre de l'équation ci-dessus est donc en réalité une fonction de x et de λ indépendante de y.

L'élimination de λ entre cette équation et celle de la sécante mobile conduira à l'équation de la polaire de l'ordre n du point (α, β).

Nous pouvons dès à présent faire une remarque importante. Les opérations qui conduiront à l'équation de la polaire d'ordre n du point (α, β), x et y étant regardés comme les coordonnées courantes, conduiraient à l'équation de la polaire d'ordre $p - n$ du point (x, y), si α et β étaient considérées comme coordonnées courantes. Cela résulte de la propriété caractéristique des groupes associés.

Par conséquent :

Les équations générales des polaires d'ordres complémentaires, n et $p - n$, se déduisent l'une de l'autre par une simple permutation faite entre les coordonnées courantes et les coordonnées fixes.

Si donc l'équation générale des polaires de l'ordre n est représentée par

$$f_n(x, y, \alpha, \beta) = 0,$$

l'équation générale des polaires de l'ordre $(p - n)$ sera représentée par

$$f_n(\alpha, \beta, x, y) = 0;$$

et si l'on désigne par

$$f_{p-n}(x, y, \alpha, \beta) = 0$$

l'équation générale des polaires de l'ordre $p - n$, l'équation générale des polaires de l'ordre n sera représentée par

$$f_{p-n}(\alpha, \beta, x, y) = 0.$$

On peut effectuer assez facilement l'élimination de λ, ci-dessus indiquée (*), et l'on trouve pour l'équation de la polaire d'ordre n

$$\sum_0^{p-n} \sum_0^t (-1)^{p-n-t} C_n^{p-t} C_s^t \frac{1}{P_t} (\alpha - x)^s (\beta - y)^{t-s} \frac{d^t f(\alpha, \beta)}{d\alpha^s . d\beta^{t-s}} = 0.$$

Dans cette formule, la sommation indiquée par un des signes $\sum$ se rapporte à la lettre écrite transversalement dans l'intérieur de ce signe.

8. *Conditions pour qu'une équation entre x et y, du degré $p - n$, représente une polaire de l'ordre n.*

L'équation générale de la polaire de l'ordre n, étant du degré $p - n$ en x et y, peut être mise sous la forme

$$Ax^{p-n} + By^{p-n} + \sum_1^{p-n-1} \sum_0^t K_{s,t-s} x^s y^{t-s} + C = 0,$$

A, B, C, et généralement $K_{s,t-s}$, étant exprimables par des polynômes du $n^{ième}$ degré en α et β, de formes déterminées.

Cette équation ne représente pas une courbe quelconque du degré $p - n$, car il existe entre ses coefficients des relations telles, qu'ils sont tous fonctions de trois quelconques d'entre eux.

(*) *Voir* Note IV, à la fin du volume.

$K_{s,t-s}$ est une fonction de A, B, C, ou plutôt $\frac{K_{s,t-s}}{C}$ est une fonction de $\frac{A}{C}$ et de $\frac{B}{C}$. La nature de cette fonction varie quand les indices s et t changent, et sa détermination exigerait des calculs très-laborieux. Sans doute la forme de cette fonction ne peut pas être représentée explicitement, mais il est évident que la fonction existe.

L'expression générale de $K_{s,t-s}$ en fonction de A, B, C, représenterait les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation ci-dessus soit celle d'une polaire de l'ordre n.

9. *Pôles des différents ordres.*

La forme précédente de l'équation générale de la polaire de l'ordre n ne contenant pas explicitement les coordonnées des points qui peuvent être regardés comme *pôles de l'ordre n* correspondants, on peut se proposer de déterminer les coordonnées de ces points.

Si α et β représentent ces coordonnées, il résulte des formules posées au n° 7 qu'elles doivent satisfaire aux équations simultanées

$$\frac{A}{\dfrac{(-1)^{p-n}d^{p-n}f(\alpha,\beta)}{d\alpha^{p-n}}} = \frac{B}{\dfrac{(-1)^{p-n}d^{p-n}f(\alpha,\beta)}{d\beta^{p-n}}}$$

$$= \frac{P_{p-n}C}{\sum_0^{p-n}\sum_0^{t}(-1)^{p-n-t}\frac{1}{P_t}C_n^{p-t}C_s^t\alpha^s\beta^{t-s}\dfrac{d^tf(\alpha,\beta)}{d\alpha^s d\beta^{t-s}}} \text{ (*)}.$$

Ces équations sont entières et du degré n en α et β; leur résolution donnerait n^2 systèmes de valeurs de α et de β, d'où l'on conclut que le nombre des pôles est égal à n^2.

10. *Conditions pour qu'un groupe de n^2 points soit composé de pôles de l'ordre n.*

Un groupe de n^2 points ne représente pas, en général, des pôles de l'ordre n. Pour qu'il soit composé de pôles, il faut et

(*) *Voir* Note V, à la fin du volume.

il suffit que les coordonnées α, β de l'un quelconque de ses points satisfassent aux équations simultanées

$$\frac{d^{p-n}f(\alpha,\beta)}{d\alpha^{p-n}}=\mu\sum_0^{p-n}\sum_0^{t}(-1)^t C_n^{p-t} C_s^t \frac{1}{P_t}\frac{1}{P_{p-n}}\alpha^s\beta^{t-s}\frac{d^t f(\alpha,\beta)}{d\alpha^s\, d\beta^{t-s}},$$

$$\frac{d^{p-n}f(\alpha,\beta)}{d\beta^{p-n}}=\nu\sum_0^{p-n}\sum_0^{t}(-1)^t C_n^{p-t} C_s^t \frac{1}{P_t}\frac{1}{P_{p-n}}\alpha^s\beta^{t-s}\frac{d^t f(\alpha,\beta)}{d\alpha^s\, d\beta^{t-s}},$$

dans lesquelles μ et ν représentent deux paramètres arbitraires.

Par ces équations, un point quelconque du groupe détermine tous les autres.

11. *Corrélation des pôles et des polaires de tous les ordres.*

Si l'on représente par

$$f_n(x, y, \alpha, \beta)=0$$

l'équation de la polaire de l'ordre n du point (α, β), l'équation de la polaire de l'ordre $p-n$ du point (x, y) peut être mise sous la forme

$$f_n(x, y, X, Y)=0,$$

X et Y désignant les coordonnées courantes.

Pour les valeurs de x et de y qui satisfont à la première de ces deux équations, la seconde est vérifiée par $X=\alpha$ et $Y=\beta$. α et β peuvent être regardées comme les coordonnées de l'un quelconque des pôles de la courbe représentée par la première équation. Donc :

THÉORÈME XXIII. — *Lorsqu'un groupe de pôles de l'ordre $(p-n)$ se meuvent sur une polaire de l'ordre n, leur polaire commune pivote autour des pôles de leur trajectoire* (*).

(*) BOBILLIER, Théorèmes sur les polaires successives (*Annales de Gergonne*, t. XIX; Nîmes, 1828-1829).

Réciproquement :

THÉORÈME XXIV. — *Lorsqu'une polaire de l'ordre* $(p-n)$ *pivote autour d'un groupe de pôles de l'ordre* n, *les pôles de cette courbe engendrent la polaire commune de ses pivots.*

Ces théorèmes généraux contiennent, comme cas particuliers, les théorèmes XXI et XXII.

12. *Nouvelle forme de l'équation générale des polaires de l'ordre n.*

Considérons l'équation

$$\frac{d^{p-n} f(\alpha, \beta)}{d\alpha^{p-n}} + \lambda \frac{d^{p-n} f(\alpha, \beta)}{d\beta^{p-n}}$$

$$= (\mu + \lambda\nu) \sum_0^{p-n} \sum_0^{t} (-1)^t C_n^{p-t} C_s^t \frac{1}{P_t} \frac{1}{P_{t-n}} \alpha^s \beta^{t-s} \frac{d^t f(\alpha, \beta)}{d\alpha^s d\beta^{t-s}},$$

dans laquelle nous regarderons α et β comme les coordonnées courantes ; λ, μ, ν sont trois constantes arbitraires.

Cette équation du degré n représente un faisceau de courbes pivotantes autour du groupe des pôles de l'ordre n, au nombre de n^2, déterminés par les équations générales du n° 10. C'est l'équation générale des courbes du degré n qui peuvent passer par ce groupe de points, c'est-à-dire qu'elle peut représenter une quelconque de ces courbes. En effet, si une courbe du $n^{ième}$ degré passe par le groupe de pôles dont il s'agit, on peut toujours déterminer la constante arbitraire λ de manière à faire passer une des courbes du faisceau par un point différent du groupe des pôles et situé sur la courbe considérée. On a ainsi deux courbes du $n^{ième}$ degré, qui ont (n^2+1) points communs, et qui, par conséquent, coïncident dans toute leur étendue.

On voit ainsi que l'équation ci-dessus est l'équation générale des polaires de l'ordre n, mise sous une forme qui ne contient pas explicitement l'expression d'un pôle de la courbe.

En résumé, l'équation générale des polaires de l'ordre n

peut être mise sous les trois formes suivantes :

$$(1)\quad \sum_0^n \sum_0^t (-1)^{n-t} C_{p-n}^{p-t} C_s^t \frac{1}{P_t}(x-\alpha)^s (y-\beta)^{t-s} \frac{d^t f(x,y)}{dx^s dy^{t-s}} = 0,$$

$$(2)\quad \sum_0^{p-n} \sum_0^t (-1)^{p-n-t} C_n^{p-t} C_s^t \frac{1}{P_t}(\alpha-x)^s (\beta-y)^{t-s} \frac{d^t f(\alpha,\beta)}{d\alpha^s d\beta^{t-s}} = 0,$$

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^{p-n} f(x,y)}{dx^{p-n}} + \lambda \frac{d^{p-n} f(x,y)}{dy^{p-n}} \\ &= (\mu + \lambda\nu) \sum_0^{p-n} \sum_0^t (-1)^t C_n^{p-t} C_s^t \frac{1}{P_t} \frac{1}{P_{p-n}} x^s y^{t-s} \frac{d^t f(x,y)}{dx^s dy^{t-s}}. \end{aligned} \right.$$

Dans les deux premières, α, β sont les coordonnées d'un quelconque des pôles de la courbe ; dans la seconde, λ et $(\mu + \lambda\nu)$ sont deux constantes arbitraires. Ces équations comportent toutes le même degré de généralité.

13. *Polaire d'un groupe de n points.*

Lorsque l'équation $f(x,y) = 0$, du degré p, a donné naissance à l'équation du degré $(p-1)$

$$f_1(x,y) = (x-\alpha) f'_x + (y-\beta) f'_y - pf = 0,$$

qui représente la polaire conjuguée du point (α, β), cette courbe peut à son tour donner naissance à la polaire conjuguée d'un point (γ, δ), laquelle aura pour équation du degré $(p-2)$,

$$f_2(x,y) = (x-\gamma)(f_1)'_x + (y-\delta)(f_1)'_y - (p-1) f_1 = 0.$$

En continuant ainsi, et en considérant successivement les divers points d'un groupe de n points, on arriverait à une équation du degré $(p-n)$, qui représenterait la *polaire d'un groupe de n points.*

L'équation $f_2(x,y) = 0$ se développe sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &(x-\alpha)(x-\gamma) f''_{x^2} + [(x-\alpha)(y-\delta) + (x-\gamma)(y-\beta)] f''_{x,y} \\ &+ (y-\beta)(y-\delta) f''_{y^2} \\ &- (p-1) \{ [(x-\alpha) + (x-\gamma)] f'_x + [(y-\beta) + (y-\delta)] f'_y \} \\ &+ p(p-1) f = 0. \end{aligned}$$

Elle ne change pas par la permutation des lettres α et γ, β et δ. Si donc, au lieu de prendre d'abord la polaire conjuguée de (α, β) et ensuite celle de (γ, δ), on avait fait l'inverse, l'équation obtenue n'aurait pas changé.

Cette observation se généralise aisément, et l'on arrive à ce théorème :

Théorème XXV. — *Si l'on a à prendre successivement les polaires conjuguées d'un groupe de n points, en partant d'une courbe donnée, d'un degré supérieur à n, l'ordre suivi dans les opérations sera sans influence sur la courbe obtenue.*

14. *Polaires des différents ordres d'un point de la courbe donnée.*

Si un point S, dont on veut déterminer la polaire de l'ordre n, est situé sur la courbe donnée, la tangente en ce point est une transversale sur laquelle le point de contact figure doublement parmi ses propres conjugués du $n^{ième}$ ordre.

Donc :

Théorème XXVI. — *La polaire de l'ordre n d'un point de la courbe touche en ce point la courbe donnée.*

La tangente en un point de la courbe donnée ne diffère pas de la polaire harmonique de ce point.

Car, lorsque le point (α, β) est situé sur la courbe dont l'équation est

$$f(x, y) = 0$$

du degré p, l'équation de la polaire harmonique de ce point se réduit à

$$(x - \alpha) f'_\alpha (\alpha, \beta) + (y - \beta) f'_\beta (\alpha, \beta) = 0.$$

C'est précisément l'équation de la tangente à la courbe.

15. *Polaires des différents ordres des points d'inflexion et des points singuliers.*

Si le point S coïncide avec un point d'inflexion d'ordre quelconque, ou avec un point singulier d'ordre quelconque de la

courbe donnée, on voit, en raisonnant comme ci-dessus, qu'il sera un point d'inflexion ou un point singulier, du même ordre, sur chacune de ses propres polaires.

Donc :

THÉORÈME XXVII. — *Un point d'inflexion, ou un point singulier, d'ordre quelconque de la courbe donnée, est un point de même espèce, du même ordre, sur chacune de ses propres polaires.*

16. *Polaires des différents ordres d'un point à l'infini.*

Si le point S s'éloigne à l'infini, dans une direction quelconque, ses points conjugués des différents ordres, sur une sécante arbitraire, sont les points centraux des mêmes ordres correspondant à cette direction.

Donc :

THÉORÈME XXVIII. — *Les polaires des différents ordres d'un point à l'infini sont les diamètres des mêmes ordres de la direction correspondante.*

Si le point s'éloigne successivement à l'infini sur toutes les directions possibles, il peut être considéré comme décrivant la droite à l'infini du plan. De là résulte que tous les diamètres du premier ordre de la courbe donnée passent nécessairement par un groupe de $(p-1)^2$ points, lesquels sont les *pôles harmoniques de la droite à l'infini.* Ainsi se trouve justifiée la dénomination de *pôles de l'infini* que nous avons donnée à ces points (livre I, chap. III).

17. *Propriété générale des polaires de groupes de points.*

Si la courbe donnée présente un point singulier de l'ordre n de multiplicité, on voit, en raisonnant comme plus haut, qu'il appartient, comme point singulier de l'ordre $(n-n')$ de multiplicité, à toute polaire d'un groupe de n' points, pourvu que n' soit inférieur à $n-1$. De là ce théorème :

THÉORÈME XXIX. — *Un point singulier de l'ordre n appar-*

tient à toutes les polaires de groupes de points en nombre inférieur à $(n+1)$.

Pour la polaire d'un groupe de points en nombre n', *inférieur à* n, *le point singulier d'ordre* n *de la courbe est un point singulier de l'ordre* $(n-n')$.

18. *Propriété générale des groupes de pôles.*

Ce théorème s'applique, en particulier, au cas où les n' points du groupe coïncident entre eux, de manière que la polaire du groupe devienne une polaire de l'ordre n; on en déduit le théorème suivant :

THÉORÈME XXX. — *Un point singulier de l'ordre* n *entre au degré* $(n-n'+1)$ *de multiplicité dans tout groupe de pôles de l'ordre* n.

19. *Propriété perspective.*

Enfin le n° 11 du chapitre relatif aux points conjugués conduit sans difficulté à cet important théorème :

THÉORÈME XXXI. — *La figure formée par une courbe et des pôles et polaires y relatifs n'est pas altérée dans sa nature par une transformation perspective.*

20. *Nouvelle définition de la courbe centrale.*

En considérant en particulier les polaires d'ordre $(p-2)$, lesquelles sont des courbes du second degré, on peut arriver à une nouvelle définition de la courbe centrale.

Soient (α, β) les coordonnées d'un pôle; la polaire conique correspondante a pour équation :

$$\begin{aligned}&(\alpha-x)^2 f''_{\alpha^2} + 2(\alpha-x)(\beta-y) f''_{\alpha,\beta}\\ &+(y-\beta)^2 f''_{\beta^2} - 2(p-1)\left[(\alpha-x)f'_\alpha + (\beta-y)f'_\beta\right]\\ &+p(p-1)f=0,\end{aligned}$$

en désignant par la lettre f ce que devient le polynôme $f(x, y)$ lorsqu'on y remplace x et y par α et β.

La conique représentée par cette équation devient une parabole lorsqu'on a

$$f''_{\alpha^2} f''_{\beta^2} = (f''_{\alpha,\beta})^2.$$

Par conséquent :

THÉORÈME XXXI *bis*. — *La courbe centrale est le lieu géométrique des points dont les polaires coniques sont des paraboles.*

21. *Courbe Hessienne.*

Conservant les notations précédentes, désignons par x_1 et y_1 les coordonnées du centre de la polaire conique du point α, β; ces coordonnées satisfont aux deux équations :

$$\begin{cases} (\alpha - x_1) f''_{\alpha^2} + (\beta - y_1) f''_{\alpha,\beta} - (p-1) f'_\alpha = 0 \\ (\beta - y_1) f''_{\beta^2} + (\alpha - x_1) f''_{\alpha,\beta} - (p-1) f''_\beta = 0. \end{cases}$$

Pour que la polaire conique se décompose en un système de deux droites, il faut et il suffit que son centre lui appartienne. Dans cette hypothèse, ce centre constituera un point singulier de la polaire conique; donc, en vertu du théorème XXIX, il appartiendra à la polaire harmonique du point (α, β), et l'on aura

$$(\alpha - x_1) f'_\alpha + (\beta - y_1) f'_\beta - pf = 0.$$

Éliminant x_1 et y_1 entre cette équation et les deux précédentes, nous aurons

$$\begin{aligned} &(p-1)(f'^2_\alpha f''_{\beta^2} - 2 f'_\alpha f'_\beta f''_{\alpha,\beta} + f'_\beta f''_{\alpha^2}) \\ &+ p(f''^2_{\alpha,\beta} - f''_{\beta^2} f''_{\alpha^2}) f = 0 \end{aligned}$$

pour équation du lieu géométrique des points dont les polaires coniques se décomposent en deux droites. Cette courbe est la *Hessienne* de la courbe donnée (*).

L'équation de cette courbe est en apparence de degré $(3p-4)$, mais elle n'est en réalité que du degré $3(p-2)$, parce que les

(*) Voir *Introduzione ad una Teoria geometrica delle Curve piane*, pel Luigi Cremona; Bologne, 1862.

coefficients des termes des degrés $(3p-4)$ et $(3p-5)$ sont identiquement nuls.

En se reportant au n° 3 du chapitre des *points remarquables*, on voit que les coordonnées de chaque point d'inflexion de la courbe donnée satisfont à l'équation de la Hessienne.

Par conséquent :

La Hessienne d'une courbe passe par tous les points d'inflexion de cette courbe.

C'est ce qu'on pouvait reconnaître sans calcul, car il résulte du théorème XXVII que la polaire conique d'un point d'inflexion se décompose nécessairement en deux droites dont l'une est la tangente en ce point.

Les coordonnées (x, y) d'un point singulier annulant les trois polynômes $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x, y)$, on voit encore que :

La Hessienne d'une courbe passe par tous les points singuliers de cette courbe.

CHAPITRE III.

POLAIRES DIAMÉTRALES.

1. *Tangentes à une courbe issues d'un point extérieur.*

Lorsqu'on veut exprimer que la tangente, en un point (x, y) de la courbe

$$f(x, y) = 0,$$

passe par un point S, dont les coordonnées sont α, β, on est conduit à l'équation

$$(x - \alpha) f'_x + (y - \beta) f'_y = 0.$$

Cette équation représente une ligne qui, lorsque la courbe donnée est algébrique et du degré p, est elle-même algébrique et du même degré.

Les termes du plus haut degré sont proportionnels dans les équations des deux courbes. Il en résulte que les deux courbes ont les mêmes points à l'infini, ou, en d'autres termes, qu'elles admettent la droite à l'infini du plan pour corde commune.

Les deux courbes ont en commun d'autres points que ceux à l'infini. Ces points, au nombre de $p(p-1)$, sont situés sur la polaire conjuguée de S, laquelle a pour équation

$$(x - \alpha) f'_x + (y - \beta) f'_y - pf = 0.$$

Les tangentes, en ces points, à la courbe donnée, vont concourir au point S.

2. *Définition de la polaire diamétrale d'un point.*

Si l'on mène par le point S une série de sécantes, et si, sur chacune de ces droites, on prend les points centraux du sys-

tème de ses points d'intersection avec la courbe donnée, on détermine une courbe qui est précisément représentée par l'équation

$$(x-\alpha)f'_x+(y-\beta)f'_y=0,$$

ci-dessus trouvée.

Cette courbe, du degré p, présente à la fois de l'analogie avec les polaires, en ce sens qu'elle est définie par des sécantes issues d'un même point, et avec les diamètres, en ce sens qu'elle est définie par la considération des points centraux.

Nous l'appelons la *polaire diamétrale* du point S.

3. *Propriétés des polaires diamétrales.*

Ce que nous avons dit au n° 1 de ce chapitre se traduit par le théorème suivant sur les polaires diamétrales :

THÉORÈME XXXII. — *La droite à l'infini est une corde commune à la courbe proposée et à toutes les polaires diamétrales.*

Les autres points d'intersection de la courbe donnée et de la polaire diamétrale d'un point quelconque sont ceux où aboutissent les tangentes à la courbe donnée issues de ce point.

Quels que soient α et β, la polaire diamétrale passe par les points déterminés par les équations simultanées

$$\begin{cases} f'_x=0, \\ f'_y=0, \end{cases}$$

et ces points, au nombre de $(p-1)^2$, sont les pôles de l'infini de la courbe.

Donc :

THÉORÈME XXXIII. — *Toutes les polaires diamétrales relatives à une courbe passent par les pôles de l'infini de cette courbe.*

Enfin l'équation de la polaire diamétrale du point S est satisfaite par $x=\alpha$, $y=\beta$.

Donc :

THÉORÈME XXXIV.— *La polaire diamétrale d'un point quelconque passe par ce point.*

4. *Polaires diamétrales dans les coniques.*

Lorsque la courbe donnée est une section conique, la polaire diamétrale d'un point quelconque est aussi une conique. Dans l'équation de celle-ci, les termes du second degré ont des coefficients proportionnels à ceux des termes correspondants de l'équation de la conique donnée. Les deux courbes sont donc *homothétiques.*

Lorsque la conique est un cercle, toute polaire diamétrale est aussi un cercle.

5. *Polaire diamétrale d'un point de la courbe.*

Tout point commun, à un degré quelconque de multiplicité, à la courbe donnée et à la polaire conjuguée d'un point quelconque, appartient, au même degré de multiplicité, à la polaire diamétrale de ce point.

De là ce théorème :

THÉORÈME XXXV.— *La polaire diamétrale d'un point de la courbe donnée touche cette courbe en ce point.*

Un point d'inflexion ou un point singulier, d'ordre quelconque, de la courbe donnée, est de même espèce, au même ordre, dans sa propre polaire diamétrale.

6. *Polaire diamétrale d'un point à l'infini.*

Si le point S s'éloigne à l'infini, dans une direction quelconque, sa polaire diamétrale finit par avoir $(p+1)$ points sur la droite à l'infini, ce qui exige que cette droite lui appartienne tout entière.

Il en résulte que l'équation de cette polaire doit se décomposer en deux autres, dont l'une représente la droite à l'infini du plan, et dont l'autre est du degré $(p-1)$.

Si m est le coefficient angulaire de la direction du point S, on a

$$\lim \frac{y-\beta}{x-\alpha} = \lim \frac{\beta}{\alpha} = m.$$

En sorte que l'équation de la polaire diamétrale se décompose à la limite en ces deux autres

$$\begin{cases} x = \alpha, \\ f'_x + mf'_y = 0. \end{cases}$$

En négligeant la droite à l'infini, on peut énoncer ce théorème :

THÉORÈME XXXVI. — *La polaire diamétrale d'un point à l'infini ne diffère pas du diamètre de la direction de ce point.*

7. *Polaire diamétrale d'un pôle de l'infini.*

Si le point S vient à coïncider avec un des pôles de l'infini de la courbe, ce point appartient doublement à sa polaire diamétrale, attendu que les valeurs $x = \alpha$ et $y = \beta$ annulent les polynômes f'_x et f'_y.

Donc :

THÉORÈME XXXVII. — *Tout pôle de l'infini de la courbe donnée est un point singulier dans sa propre polaire diamétrale.*

8. *Polaires diamétrales des différents points d'une droite.*

Supposons que le point S décrive la droite dont l'équation est

$$y = mx + a,$$

on aura

$$\beta = m\alpha + a,$$

et l'équation de la polaire diamétrale pourra se mettre sous la forme

$$\alpha\left(f'_x + mf'_y\right) - xf'_x + (a-y)f'_y = 0.$$

Lorsque S se meut sur la droite, sa polaire diamétrale passe

constamment par les points dont les coordonnées satisfont aux équations simultanées

$$\begin{cases} f'_x + mf'_y = 0, \\ xf'_x + (y - a)f'_y = 0. \end{cases}$$

La première de ces équations représente le diamètre de la direction de la droite, la deuxième représente la polaire diamétrale de l'ordonnée à l'origine.

[Ce dernier point peut être regardé comme un point quelconque de la droite, attendu qu'aucune hypothèse n'a été faite sur les axes de coordonnées.]

Donc :

THÉORÈME XXXVIII. — *Lorsqu'un point décrit une droite, sa polaire diamétrale pivote autour d'un groupe de p^2 points.*

Les deux équations

$$\begin{cases} f'_x + mf'_y = 0, \\ xf'_x + (y - a)f'_y = 0, \end{cases}$$

peuvent être algébriquement combinées de manière à donner naissance au système équivalent

$$\begin{cases} f'_x + mf'_y = 0, \\ y = mx + a. \end{cases}$$

La seconde représente la droite donnée elle-même. Par conséquent les points d'intersection de cette droite avec le diamètre de sa direction, points qui sont au nombre de $(p-1)$, appartiennent aux polaires diamétrales de tous les points de cette droite.

Ce sont précisément les points centraux du système des intersections de la droite avec la courbe donnée; on pouvait reconnaître *à priori* que ces points sont communs aux polaires diamétrales de tous les points de la droite.

En résumé :

THÉORÈME XXXIX. — *Les p^2 pivots communs aux polaires diamétrales de tous les points d'une droite se composent :*

1° *Des pôles de l'infini de la courbe donnée, au nombre de $(p-1)^2$;*

2° *Des points à l'infini de la courbe donnée, au nombre de p;*

3° *Des $(p-1)$ points centraux relatifs à la droite.*

9. *Intersection de deux polaires diamétrales quelconques.*

Si l'on considère deux polaires diamétrales quelconques, celles des points S et T, on voit que ces courbes font partie du faisceau des polaires diamétrales des points de la droite ST.

Par conséquent :

THÉORÈME XL. — *Les p^2 points d'intersection de deux polaires diamétrales quelconques se composent :*

Des $(p-1)$ points centraux relatifs à la droite des pôles;

Des p points à l'infini de la courbe donnée;

Et des $(p-1)^2$ pôles de l'infini de cette courbe.

Ce théorème ne diffère du précédent que par la forme.

10. *Propriété projective.*

En se reportant au n° 9 du chapitre relatif aux points centraux, on est conduit à ce théorème :

THÉORÈME XLI. — *La figure formée par une courbe et des pôles et polaires diamétrales y relatifs n'est pas altérée dans sa nature par les transformations projectives.*

CHAPITRE IV.

COURBES PIVOTANTES.

1. *Observation sur les théories précédentes.*

La théorie des diamètres, celle des polaires et celle des polaires diamétrales conduisent à des courbes qui pivotent autour de certains points.

Ainsi les diamètres de toutes les directions possibles, pris relativement à une même courbe algébrique du degré p, forment un faisceau de courbes qui pivotent autour des pôles de l'infini, au nombre $(p-1)^2$, de la courbe donnée.

Les polaires d'ordre n de tous les points d'une polaire d'ordre $(p-n)$ pivotent autour des pôles, au nombre de $(p-n)^2$, de cette dernière courbe.

Les polaires diamétrales des différents points d'une droite forment encore un faisceau pivotant autour de p^2 points que nous avons définis.

2. *Définition et équation générale des courbes pivotantes.*

Cette observation conduit à étudier les *courbes pivotantes*.

Nous appellerons *faisceau pivotant du $m^{ième}$ degré* un faisceau de courbes du degré m, qui ont toutes, deux à deux, les mêmes points d'intersection au nombre de m^2.

Un tel faisceau peut être représenté par une équation générale du $m^{ième}$ degré en x et y, laquelle contiendra un paramètre arbitraire μ.

Si les équations du degré m

$$\varphi(x, y) = 0,$$
$$\varphi_1(x, y) = 0,$$

représentent deux courbes quelconques du faisceau, l'équation générale dont nous venons de parler pourra se mettre sous la forme

$$\varphi(x, y) + \mu\varphi_1(x, y) = 0.$$

En effet cette équation représente, quel que soit μ, une courbe du degré m passant par les points d'intersection des deux courbes particulières considérées; en second lieu, μ peut toujours être déterminé de manière que l'équation ci-dessus représente une quelconque des courbes du faisceau pivotant.

3. *Propriété des coniques circonscrites à un même quadrilatère.*

Lorsque des coniques sont circonscrites à un même quadrilatère, et forment ainsi un faisceau pivotant, les polaires d'un même point du plan, relativement à ces coniques, forment elles-mêmes un faisceau pivotant, c'est-à-dire qu'elles convergent toutes en un même point.

Ce théorème, dû à M. Lamé, est un cas particulier d'un théorème très-général que nous allons démontrer.

4. *Propriété d'un faisceau pivotant quelconque.*

Considérons un faisceau pivotant du $p^{ième}$ degré défini par l'équation

$$\varphi(x, y) + \lambda\varphi_1(x, y) = 0,$$

dans laquelle φ et φ_1 sont des fonctions algébriques entières et rationnelles du $p^{ième}$ degré en x et y; λ désigne un paramètre arbitraire.

Les équations

$$\varphi(x, y) = 0,$$
$$\varphi_1(x, y) = 0,$$

représentent deux courbes particulières du faisceau.

Cela posé, soient α et β les coordonnées d'un point S du plan; les polaires d'ordre quelconque $n < p$ de ce point, relativement aux deux courbes particulières du faisceau, se-

ront représentées par des équations du degré $(p-n)$,

$$\psi(x, y) = 0,$$
$$\psi_1(x, y) = 0.$$

En se reportant à l'équation générale des polaires de l'ordre n, trouvée au n° 7 du chapitre II, on voit que l'équation

$$\psi(x, y) + \lambda\psi_1(x, y) = 0$$

est celle des polaires de l'ordre n du point S relativement aux courbes pivotantes.

Ces polaires passent donc toutes par les points dont les coordonnées vérifient les équations simultanées

$$\psi(x, y) = 0,$$
$$\psi_1(x, y) = 0.$$

De là ce théorème :

Théorème XLII. — *Les polaires d'ordre quelconque d'un point du plan, relativement aux diverses courbes d'un faisceau pivotant, forment elles-mêmes un faisceau pivotant.*

5. *Observation relative aux groupes de pivots.*

Le nombre des points autour desquels on peut faire pivoter une courbe algébrique du degré p est égal à p^2.

D'autre part, le nombre des termes de l'équation générale, du degré p, à deux variables, est égal à

$$\frac{(p+1)(p+2)}{2} \text{ (*)},$$

d'où il résulte que le nombre des points nécessaires pour déterminer une courbe de l'ordre p est égal à

$$\frac{p(p+3)}{2}.$$

On a identiquement

$$p^2 - \frac{p(p+3)}{2} = \frac{p(p-3)}{2},$$

valeur entière et toujours positive pourvu que p surpasse 3.

(*) *Voir* Note VI, à la fin du volume.

Or, lorsqu'un groupe de p^2 points est *pivotable* par une courbe du degré p, il laisse à cette courbe une indétermination telle, qu'on peut la faire passer par un point quelconque. Par conséquent les pivots ne sont pas des points entièrement arbitraires.

Il y a seulement $\frac{p^2+3p-2}{2}$ de ces points qui peuvent être pris arbitrairement, et ils déterminent les $\frac{p^2-3p+2}{2}$ autres.

Par exemple, lorsque 9 points forment un groupe pivotable par une courbe du troisième ordre, 8 d'entre eux déterminent le neuvième d'une certaine manière.

LIVRE III.

GÉOMÉTRIE TANGENTIELLE. — COURBES ROULANTES. PRINCIPE DE DUALITÉ.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME DE DROITES CONVERGENTES. — DROITES CONJUGUÉES ET DROITES HARMONIQUES.

1. *Définitions géométrique et analytique des droites conjuguées.*

Étant donné un système de p droites convergentes, nous appellerons *conjuguées* d'une droite passant par le point de convergence, *les droites issues de ce point et telles, que le produit des sinus des angles que forme l'une quelconque d'entre elles avec les droites du système, divisé par la puissance $p^{ième}$ du sinus de l'angle qu'elle forme avec la droite donnée, conduise à un quotient maximum ou minimum.*

Si l'on désigne par $X_1, X_2, \ldots, X_p$ les angles formés par les droites du système donné avec une droite origine, passant par le point de convergence, par A l'angle formé par la droite donnée avec cette droite origine, et par X l'angle formé par l'une quelconque des droites conjuguées avec la même droite origine, on peut écrire, d'après la définition ci-dessus,

$$\frac{\sin(X - X_1)\sin(X - X_2)\ldots\sin(X - X_p)}{\sin^p(X - A)} = \text{max. ou min.}$$

Posons

$$\begin{cases} x_1 = \operatorname{tang} X_1, \quad x_2 = \operatorname{tang} X_2, \ldots, \quad x_p = \operatorname{tang} X_p, \\ \alpha = \operatorname{tang} A, \\ x = \operatorname{tang} X. \end{cases}$$

Nous aurons :

$$\begin{cases} \sin(X - X_1) = \sin X \cos X_1 - \sin X_1 \cos X = \cos X \cos X_1 (x - x_1), \\ \sin(X - X_2) = \sin X \cos X_2 - \sin X_2 \cos X = \cos X \cos X_2 (x - x_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sin(X - X_p) = \sin X \cos X_p - \sin X_p \cos X = \cos X \cos X_p (x - x_p), \\ \sin(X - A) = \sin X \cos A - \sin A \cos X = \cos X \cos A (x - A), \end{cases}$$

et l'équation qui détermine les droites conjuguées pourra être mise sous la forme

$$\frac{\cos^m X \cos X_1 \cos X_2 \ldots \cos X_p (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_p)}{\cos^m X \cos^m A (x - a)^p} = \text{max. ou min.}$$

ou, plus simplement, sous la forme

$$\frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_p)}{(x - \alpha)^p} = \text{maximum ou minimum.}$$

Les constantes $x_1, x_2 \ldots, x_p$ peuvent être les racines d'une équation du degré p,

$$f(x) = A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_{p-1} x + A_p = 0.$$

On a alors

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_p) = \frac{f(x)}{A_0},$$

et l'équation aux droites conjuguées peut s'écrire

$$\frac{f(x)}{A_0 (x - \alpha)^p} = \text{maximum ou minimum,}$$

ou encore

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{(x - \alpha)^p} = 0,$$

ou enfin

$$(x - \alpha) f'(x) - p f(x) = 0.$$

Cette équation est du degré $(p-1)$; et comme à une valeur de x correspond une position unique et déterminée d'une droite passant par le point de convergence, on voit que les conjuguées d'une droite sont au nombre de $(p-1)$.

2. *Nouvelle définition géométrique. Droites harmoniques.*

L'équation ci-dessus peut encore s'écrire

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{p}{x-\alpha}$$

et par conséquent être mise sous la forme

$$\frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \ldots + \frac{1}{x-x_p} = \frac{p}{(x-\alpha)},$$

qui correspond à une des formes que nous avons précédemment trouvées pour l'équation aux points conjugués. On peut en déduire une nouvelle définition géométrique simple des droites conjuguées.

Désignons par O le point de convergence, par OS la droite donnée, par OV une quelconque de ses conjuguées, par OM_1, $OM_2, \ldots, OM_p$, le système donné.

L'équation ci-dessus existant, sans changement de forme, quelle que soit la droite origine, nous pouvons prendre pour celle-ci la droite OV elle-même; l'équation est alors vérifiée par la valeur $x = 0$, et l'on a

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_p} = \frac{p}{\alpha},$$

ou, géométriquement,

$$\frac{1}{\operatorname{tang} VOM_1} + \frac{1}{\operatorname{tang} VOM_2} + \ldots + \frac{1}{\operatorname{tang} VOM_p} = \frac{p}{\operatorname{tang} VOS}.$$

Cette formule montre que tang VOS est la *moyenne harmonique* entre les quantités tang VOM_1, tang $VOM_2, \ldots$, tang VOM_p, et l'on peut dire que OS est *l'axe des moyennes harmoniques* du système relativement à la droite OV, ou plus simplement que la droite OS est l'*harmonique* de OV.

De là cette nouvelle définition géométrique des droites con-

juguées. *Les conjuguées d'une droite donnée, relativement à un système de p droites convergentes, sont telles, que l'axe des moyennes harmoniques du système relativement à chacune d'elles n'est autre que la droite donnée.*

3. *Observation relative à l'équation aux droites conjuguées.*

D'après ce qui précède, si l'on prend pour origine une droite passant par le point de convergence du système considéré, et si l'on détermine une droite quelconque, issue de ce point, par la tangente de l'angle qu'elle forme avec la droite origine (angle compté dans un sens de rotation déterminé), la théorie analytique des droites conjuguées conduit à des équations identiques à celles qui ont été trouvées dans la théorie des points conjugués.

4. *Conséquences de cette remarque.*

Nous pouvons donc énoncer sans nouveaux calculs toutes les propriétés relatives aux droites conjuguées qui ont leurs analogues dans la théorie des points conjugués.

Voici les énoncés de ces théorèmes :

THÉORÈME XLIII. — *Si l'on a à prendre successivement les conjuguées de n droites relativement à un système de droites convergentes quelconques, en nombre supérieur à n, l'ordre suivi dans les opérations sera sans influence sur le résultat.*

De là la notion des *droites conjuguées des différents ordres.*

THÉORÈME XLIV. — *Si une droite est conjuguée d'ordre n d'une autre droite relativement à un système de p droites données, la seconde est conjuguée d'ordre $p-n$ de la première, relativement au même système.*

De là la notion des *faisceaux associés.*

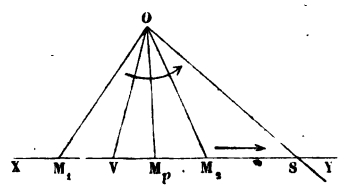
THÉORÈME XLV.— *Toute droite multiple de l'ordre n parmi les droites données est une droite multiple de l'ordre $(n-1)$ parmi les conjuguées d'une droite quelconque.*

THÉORÈME XLVI. — *Une droite du degré n de multiplicité*

parmi les droites données figure au même degré de multiplicité parmi ses propres conjuguées. Les autres conjuguées de cette droite sont précisément celles relatives au système qu'on obtient en supprimant la droite multiple parmi les droites données.

5. *Propriété perspective.*

Soient OM_1, OM_2, ..., OM_p, les p droites convergentes com-



posant le système donné; OS la droite fixe, OV une droite quelconque.

Soit en outre XY une sécante quelconque rencontrant les précédentes droites aux points M_1, M_2, . . , M_p, S, V.

La figure ci-dessus donne sans difficulté

$$\frac{VM_1}{OM_1} = \frac{\sin VOM_1}{\sin OVS},$$

$$\frac{VM_2}{OM_2} = \frac{\sin VOM_2}{\sin OVS},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{VM_p}{OM_p} = \frac{\sin VOM_p}{\sin OVS},$$

$$\frac{VS}{OS} = \frac{\sin VOS}{\sin OVS},$$

(les angles et les segments correspondants étant comptés positivement dans le sens des flèches).

On en déduit

$$\frac{VM_1 \times VM_2 \times \ldots \times VM_p}{\overline{VS}^p} = OM_1 \times OM_2 \times \ldots \times OM_p$$

$$\times \frac{\sin VOM_1 \times \sin VOM_2 \times \ldots \times \sin VOM_p}{\sin^p VOS};$$

ou plus simplement

$$\frac{VM_1 \times VM_2 \times \ldots \times VM_p}{\overline{VS}^p} = K \frac{\sin VOM_1 \times \sin VOM_2 \times \ldots \times \sin VOM_p}{\sin^p VOS},$$

K désignant une quantité constante, c'est-à-dire indépendante de la position de la droite OV.

Les deux membres de cette équation deviennent en même temps maximum ou minimum. Il en résulte que si OV est conjuguée de OS, relativement au système (OM_1, OM_2,..., OM_p), V sera nécessairement conjugué de S relativement au système (M_1, M_2,..., M_p). Et réciproquement, si V est conjugué de S, relativement au système (M_1, M_2,..., M_p), OV sera conjuguée de OS, relativement au système (OM_1, OM_2,..., OM_p).

De là ces théorèmes :

Théorème XLVII.— *Un système de droites convergentes et deux faisceaux associés relatifs à ce système déterminent sur une transversale quelconque un système de points en ligne droite et deux groupes associés relatifs à ce système.*

Réciproquement :

Théorème XLVIII. — *Un système de points en ligne droite et deux groupes associés relatifs à ce système déterminent par leurs jonctions avec un point quelconque, extérieur à la droite, un système de droites convergentes et deux faisceaux associés relatifs à ce système.*

Et, par conséquent,

Théorème XLIX.— *Un système de droites convergentes et deux faisceaux associés relatifs à ce système donnent, par la transformation perspective, une figure de même nature.*

CHAPITRE II.

COORDONNÉES TANGENTIELLES.

1. *Des coordonnées d'une droite.*

Étant donnés deux axes OX et OY se coupant en O, un point M du plan se détermine, dans le système de Descartes, par son abscisse x et son ordonnée y, lesquelles sont égales aux distances (affectées de signes) de l'origine O aux points où les axes sont rencontrés, chacun par la parallèle à l'autre menée par M.

Une droite quelconque du plan peut être déterminée d'une manière analogue par une *abscisse* x et une *ordonnée* y, lesquelles sont les inverses des distances (affectées de signes) de l'origine O aux points où les axes sont respectivement rencontrés par la droite dont il s'agit.

On donne à ces coordonnées, qui ont été imaginées par M. Plücker, le nom de *coordonnées tangentielles*. Cette dénomination se trouve justifiée dans la suite de ce chapitre.

2. *Équation d'un point.*

On démontre que s'il existe, entre les coordonnées d'une droite mobile, la relation linéaire

$$ax + by + c = 0,$$

cette droite pivote autour d'un point dont les coordonnées sont $\left(-\frac{a}{c}\right)$ et $\left(-\frac{b}{c}\right)$ (*).

Réciproquement, les droites qui concourent en un même point, dont les coordonnées sont α et β, sont toutes comprises

(*) *Voir* Note VII, à la fin du volume.

dans l'équation linéaire

$$\alpha x + \beta y - 1 = 0.$$

Donc, en coordonnées tangentielles, une équation linéaire représente un point.

3. *Équations tangentielles des courbes.*

Si l'on établit entre les coordonnées x et y d'une droite mobile une relation quelconque

$$f(x, y) = 0,$$

la droite *enveloppera* généralement une courbe.

Réciproquement, si l'on considère une courbe quelconque, il existera nécessairement, entre l'abscisse et l'ordonnée d'une quelconque des tangentes à cette courbe, une relation

$$f(x, y) = 0.$$

Donc, en coordonnées tangentielles, toute équation entre x et y représente une courbe.

Ainsi, dans le système de coordonnées qui nous occupe, on doit regarder les courbes comme engendrées par le *roulement d'une tangente*, ce qui justifie la dénomination de coordonnées tangentielles.

4. *Équations tangentielles algébriques.*

Si l'équation

$$f(x, y) = 0$$

est algébrique et du degré p, elle représente, sous sa forme la plus générale, une série de courbes que nous appellerons *courbes de la $p^{\text{ième}}$ classe*, et auxquelles nous attribuerons d'ailleurs l'épithète d'*algébriques* ou de *géométriques*, comme aux courbes du degré ou de l'ordre p en coordonnées cartésiennes.

Une courbe de la $p^{\text{ième}}$ classe jouit de cette propriété qu'on peut lui mener p tangentes par un point quelconque du plan.

En effet, les tangentes à une telle courbe, issues du point dont les coordonnées sont (α, β), sont déterminées par les

solutions communes aux deux équations

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ \alpha x + \beta y - 1 = 0; \end{cases}$$

or ces solutions sont au nombre de p.

Plus généralement, les tangentes communes aux courbes géométriques des classes p et q, dont les équations respectives sont

$$f(x, y) = 0,$$
$$\varphi(x, y) = 0,$$

sont déterminées par les solutions communes à ces deux équations, et conséquemment ces tangentes sont au nombre de pq.

Un point doit être considéré comme une courbe de la première classe.

On sait qu'à une courbe algébrique du degré p on peut mener, par un point extérieur, $p(p-1)$ tangentes; il en résulte que cette courbe est de la classe $p(p-1)$.

5. *Intersection d'une courbe et d'une droite.*

Les points d'intersection d'une droite (α, β), en géométrie tangentielle, avec la courbe algébrique de la $p^{\text{ième}}$ classe dont l'équation est

$$f(x, y) = 0,$$

sont tels, qu'en chacun d'eux deux tangentes infiniment voisines se coupent sur la droite (α, β).

Il en résulte que les tangentes en ces points sont déterminées par les deux équations simultanées

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ (x-\alpha)f'_x + (y-\beta)f'_y - pf = 0, \end{cases}$$

des degrés p et $(p-1)$ (*).

Par conséquent, une courbe de la $p^{\text{ième}}$ classe est coupée par une droite en $p(p-1)$ points, c'est-à-dire qu'elle est de l'ordre $p(p-1)$.

(*) *Voir* Note VIII, à la fin du volume.

6. *Intersection de deux courbes.*

Connaissant la relation qui existe entre la classe et le degré d'une courbe algébrique, on voit :

Que deux courbes algébriques des degrés p, q ont généralement $p(p-1)q(q-1)$ tangentes communes ;

Et que deux courbes algébriques des classes p, q se coupent généralement en $p(p-1)q(q-1)$ points.

Nous insistons sur cette observation que :

Toute courbe algébrique du degré p est une courbe algébrique de la classe $p(p-1)$; et toute courbe algébrique de la classe p est une courbe algébrique du degré $p(p-1)$.

Elle montre que l'étude générale des courbes géométriques peut être faite aussi bien par les coordonnées tangentielles que par les coordonnées cartésiennes. Mais la totalité infinie des courbes algébriques donne lieu à des groupements différents, suivant qu'on prend ces courbes, par *ordres* en géométrie cartésienne, ou par *classes* en géométrie tangentielle.

7. *Observation relative aux droites conjuguées.*

Considérons un système de p droites convergentes, une droite quelconque passant par leur point de concours et les conjuguées d'ordre n de cette droite relativement aux premières.

Les p droites données rencontrent l'axe des abscisses en des points dont les distances à l'origine sont les racines d'une équation du degré p

$$\varphi(x) = 0.$$

La droite quelconque rencontre ce même axe en un point dont la distance à l'origine peut être désignée par α' ; enfin, nous désignons par x' la distance de l'origine au point de rencontre de l'axe des x avec l'une quelconque des droites conjuguées.

La relation entre x' et α' peut être mise sous l'une ou l'autre

des deux formes :

$$(1)\quad \begin{cases} \sum_0^n (-1)^{n-t}\, C_{p-n}^{p-t} \frac{1}{P_t} (x'-\alpha')^t \varphi^{(t)}(x) = 0, \\ \sum_0^{p-n} (-1)^{p-n-t} C_n^{p-t} \frac{1}{P_t} (\alpha'-x')^t \varphi^{(t)}(\alpha) = 0. \end{cases}$$

Faisons un changement de variable en posant

$$x' = \frac{1}{x},$$

et soit

$$\alpha' = \frac{1}{\alpha}.$$

Si nous posons en outre

$$\varphi(x') = \frac{f(x)}{x^p},$$

nous obtiendrons les transformées des équations (1) en changeant dans celles-ci x' en x, α' en α et φ en f.

Par conséquent, si

$$f(X) = 0$$

est l'équation aux abscisses d'un système de p droites convergentes, l'abscisse α d'une droite quelconque passant par leur point de concours est liée à l'abscisse x de l'une quelconque de ses conjuguées d'ordre n relativement au système donné par l'une ou par l'autre, indifféremment, des deux relations

$$\begin{cases} \sum_0^n (-1)^{n-t}\, C_{p-n}^{p-t} \frac{1}{P_t} (x-\alpha)^t f^{(t)}(x) = 0, \\ \sum_0^{p-n} (-1)^{p-n-t} C_n^{p-t} \frac{1}{P_t} (\alpha-x)^t f^{(t)}(\alpha) = 0. \end{cases}$$

CHAPITRE III.

POLES ET POLAIRES TANGENTIELS.

1. *Équation générale des pôles tangentiels.*

Soit

$$f(x, y) = 0$$

l'équation tangentielle d'une courbe de la classe p.

Par un point mobile, d'une droite (α, β), menons les tangentes à cette courbe, et prenons relativement au système de ces tangentes les conjuguées d'ordre n de la droite (α, β).

Lorsque le point mobile décrira la droite donnée, le système des droites conjuguées enveloppera une courbe que nous appellerons le *pôle tangentiel d'ordre n* de la droite.

L'équation de cette courbe résulte de l'élimination de λ entre les deux équations simultanées

$$\begin{cases} y - \beta = \lambda(x - \alpha), \\ \sum_0^n (-1)^{n-t} C_{p-n}^{p-t} \frac{1}{P_t} (x - \alpha)^t f^{(t)}(x, y) = 0, \end{cases}$$

Si l'on se reporte au chapitre II du livre II, on voit que l'équation du pôle de l'ordre n peut être mise sous chacune des trois formes indiquées au n° 12 de ce chapitre; par conséquent tout pôle tangentiel de l'ordre n, relatif à une courbe de la classe p, est une courbe de la classe $(p - n)$.

2. *Équations générales aux groupes de polaires tangentielles.*

Tout pôle tangentiel de l'ordre n correspond à l'un quelconque des n^2 côtés d'un certain polygone. Nous appelons ces droites *les polaires tangentielles* d'ordre n du pôle dont il s'agit.

Pour qu'un groupe de n^2 droites représente des polaires tangentielles relatives à un même pôle, il faut et il suffit que les coordonnées de ces droites satisfassent aux deux équations de condition indiquées au n° 10 du chapitre II du livre II, lesquelles contiennent deux paramètres μ et ν qui doivent être regardés comme constants pour le groupe des polaires tangentielles d'un même pôle.

3. *Corrélation des pôles et des polaires tangentielles.*

Il existe entre les pôles et les polaires tangentiels une corrélation analogue à celle qui existe entre les pôles et les polaires cartésiens. Elle peut s'exprimer par ces deux théorèmes :

THÉORÈME L. — *Lorsqu'un groupe de polaires tangentielles de l'ordre* $(p-n)$ *roulent sur un pôle tangentiel de l'ordre* n, *leur pôle tangentiel commun roule sur les* n^2 *polaires de leur directrice.*

Et réciproquement :

THÉORÈME LI. — *Lorsqu'un pôle tangentiel de l'ordre* $(p-n)$ *roule sur un groupe de* n^2 *polaires tangentielles de l'ordre* n, *les polaires tangentielles de cette courbe roulent sur le pôle commun de ses directrices.*

4. *Pôles tangentiels harmoniques.*

En géométrie cartésienne nous avons appelé *polaire harmonique* d'un point, relativement à une courbe du degré p, la polaire d'ordre $(p-1)$ de ce point, laquelle est une ligne droite. De même, en géométrie tangentielle, nous appellerons *pôle harmonique tangentiel* d'une droite, relativement à une courbe de la classe p, le pôle d'ordre $(p-1)$ de cette droite, pôle qui se réduit à un point.

Un pôle harmonique tangentiel correspond à un groupe de $(p-1)^2$ droites que nous appellerons ses *polaires harmoniques tangentielles.*

5. *Pôles tangentiels des différents ordres d'une tangente à la courbe.*

La droite dont on cherche le pôle tangentiel de l'ordre n peut être tangente à la courbe donnée. Si l'on prend le point de contact pour sommet d'un faisceau de tangentes à la courbe, la droite donnée figure doublement parmi ses propres conjuguées de l'ordre n relatives à ce faisceau.

Il en résulte que :

THÉORÈME LII.— *Le pôle tangentiel, d'ordre n, d'une tangente à la courbe, touche, sur cette droite, la courbe donnée* (*).

Par conséquent le point de contact relatif à une tangente n'est autre que le pôle harmonique tangentiel de cette droite.

Si donc

$$f(x, y) = 0$$

est l'équation de la courbe donnée, le point de contact relatif à la tangente (α, β) est déterminé par l'équation

$$(x-\alpha)f'_\alpha(\alpha, \beta)+(y-\beta)f'_\beta(\alpha, \beta)=0.$$

6. *Tangentes singulières et tangentes de rebroussement.*

Lorsqu'une droite touche une courbe géométrique en $(n+1)$ points, on peut l'appeler *tangente singulière de l'ordre n.*

Lorsque la tangente en un point de la courbe figure au degré $(n+2)$ de multiplicité parmi le système des tangentes à la courbe que l'on peut mener par ce point, on peut donner à cette droite le nom de *tangente de rebroussement de l'ordre n* (**).

Un raisonnement analogue à celui du numéro précédent conduit à ce théorème.

THÉORÈME LIII. — *Une tangente de rebroussement, ou une tangente singulière, d'ordre quelconque, de la courbe donnée, est une tangente de même espèce, au même ordre, sur chacun de ses propres pôles tangentiels.*

(*) *Voir* Note IX, à la fin du volume.

(**) *Voir* Note X, à la fin du volume.

7. *Propriété des groupes de polaires tangentielles.*

Le même genre de raisonnement montre encore que :

Théorème LIV. — *Une tangente singulière de l'ordre n est tangente à tous les pôles tangentiels d'ordres inférieurs à* $(n+1)$.

Pour un pôle d'ordre n' inférieur à n, une tangente singulière d'ordre n, de la courbe, est une tangente singulière de l'ordre $(n-n')$.

Conséquemment :

Une tangente singulière de l'ordre n figure au degré $(n-n'+1)$ *de multiplicité dans tout groupe de polaires tangentielles de l'ordre n'.*

8. *Pôles tangentiels de la droite à l'infini.*

Les points à l'infini du plan formant un lieu géométrique qui peut être assimilé à une droite, il y a lieu de considérer les pôles tangentiels des différents ordres de l'infini.

La droite à l'infini est caractérisée par la circonstance que ses coordonnées sont nulles.

Le pôle tangentiel de l'ordre le plus élevé, ou *pôle tangentiel harmonique* de l'infini, doit être regardé comme un *point remarquable* de la courbe.

9. *Propriété perspective.*

Nous terminerons ce chapitre par le théorème suivant, dont la démonstration serait très-simple :

Théorème LIV *bis*. — *Les figures formées par des courbes, et des pôles et polaires tangentiels y relatifs, ne sont pas altérées dans leur nature par des transformations perspectives.*

CHAPITRE IV.

COURBES ROULANTES.

1. *Définition et équation tangentielle des courbes roulantes.*

Nous appellerons *faisceau roulant de la $p^{\text{ième}}$ classe* un faisceau de courbes, de la classe p, qui ont toutes, deux à deux, les mêmes tangentes communes, au nombre de p^2.

Si les équations tangentielles, du degré p,

$$\varphi(x, y) = 0,$$
$$\varphi_1(x, y) = 0,$$

représentent deux des courbes du faisceau, l'équation générale du faisceau roulant peut être mise sous la forme

$$\varphi(x, y) + \lambda\varphi_1(x, y) = 0,$$

λ désignant un paramètre variable.

2. *Propriété d'un faisceau roulant quelconque.*

Considérons un faisceau roulant, de la classe p, défini par l'équation tangentielle

$$\varphi(x, y) + \lambda\varphi_1(x, y) = 0,$$

et soient α et β les coordonnées d'une droite D du plan. Les pôles tangentiels, d'ordre $n < p$, de cette droite, relativement aux deux courbes particulières qui correspondent aux valeurs nulle et infinie de λ, seront représentés par des équations du degré $(p - n)$,

$$\psi(x, y) = 0,$$
$$\psi_1(x, y) = 0.$$

Or, d'après la forme de l'équation générale des pôles tan-

gentiels de l'ordre n, l'équation

$$\psi(x, y) + \lambda\psi_1(x, y) = 0$$

est précisément celle des pôles tangentiels d'ordre n de la droite D, relativement aux diverses courbes du faisceau roulant.

De là ce théorème :

THÉORÈME LV. — *Les pôles tangentiels d'ordre quelconque, d'une droite du plan, relativement aux diverses courbes d'un faisceau roulant, forment elles-mêmes un faisceau roulant.*

3. *Observation relative aux axes de roulement.*

Le nombre des droites sur lesquelles on peut faire rouler une courbe géométrique de la classe p est égal à p^2, mais il ne faudrait pas en conclure qu'un groupe de p^2 droites arbitraires peut représenter des axes de roulement pour une courbe de la classe p.

Un raisonnement analogue à celui que nous avons employé pour les courbes pivotantes montre que $\frac{p^2 + 3p - 2}{2}$ axes de roulement peuvent seuls être pris arbitrairement et qu'ils déterminent les $\frac{p^2 - 3p + 2}{2}$ autres.

Par exemple, pour que neuf droites forment un système *roulable* par une courbe de la troisième classe, il faut que l'une d'entre elles soit déterminée d'une certaine manière par les huit autres.

CHAPITRE V.

DU PRINCIPE DE DUALITÉ.

1. *Deux points de vue sous lesquels on peut envisager les courbes.*

Une courbe peut être considérée soit comme la *trajectoire d'un point*, soit comme l'*enveloppe d'une droite mobile* (*); la génération d'une courbe dérive donc également du mouvement d'un point et du mouvement d'une droite, l'idée de mouvement étant d'ailleurs dégagée de toute considération relative aux vitesses et aux accélérations.

Suivant qu'on adopte l'un ou l'autre de ces points de vue, on fait reposer l'étude analytique des courbes planes sur des équations entre les coordonnées d'un point ou entre les coordonnées d'une droite.

De là deux espèces de géométries, également générales. L'une, ancienne, inaugurée par Descartes, peut être appelée *géométrie cartésienne;* l'autre, plus récente, a reçu le nom de *géométrie tangentielle.*

C'est à ces deux points de vue, sous lequels on peut envisager l'analyse des courbes, qu'il faut rapporter le principe qui a reçu, dans ces dernières années, le nom de *dualité*, et en vertu duquel on peut associer par couples certaines propriétés de l'étendue.

2. *Formule générale du principe de dualité.*

Étant donné un système quelconque d'équations établies entre des coordonnées variables x et y, des coordonnées fixes

(*) PLUCKER, *Theorie der algebraischen Curven*, 1839.

(α, β), (α_1, β_1),..., en aussi grand nombre qu'on voudra, et des paramètres arbitraires λ, μ, ν,..., en nombre quelconque, ce système représentera :

En géométrie cartésienne, une figure composée de lignes et de points, fixes ou variables suivant des lois déterminées;

En géométrie tangentielle, une figure composée de lignes et de droites, fixes ou variables suivant des lois déterminées.

Occupons-nous de la première de ces figures.

La liaison intime qui existe entre elle et le système d'équations correspondant peut être étudiée sous trois points de vue différents.

D'abord on peut établir une comparaison entre les propriétés particulières ou générales du système d'équations et les propriétés correspondantes de la figure, et traduire les observations, auxquelles on est conduit, par des théorèmes qui mentionnent et des circonstances géométriques, se rapportant à la figure, et des circonstances analytiques, se rapportant au système d'équations.

Ces théorèmes appartiennent à la *géométrie analytique* proprement dite.

Exemple. — *La tangente de l'angle formé par la tangente en un point d'une courbe avec l'axe des x est représentée par la dérivée de l'ordonnée en ce point, prise relativement à l'abscisse correspondante, dans l'équation cartésienne de la courbe.*

En second lieu, on peut étudier, sur le système d'équations, certaines propriétés analytiques auxquelles correspondent des propriétés de la figure, qui peuvent être formulées en théorèmes ne mentionnant explicitement que des circonstances géométriques. Ces théorèmes sont du domaine de la *géométrie pure.*

Exemples. — 1° *Lorsqu'un hexagone est inscrit dans une conique, les couples de côtés opposés quelconques se coupent sur une même droite.* (Théorème de Pascal.)

2° *Si, par un point du plan, on mène deux transversales parallèles à deux axes fixes, les produits des segments réels ou imaginaires, formés sur ces deux droites entre le point et*

une courbe géométrique, ont un rapport constant quel que soit ce point. (Théorème de Newton.)

Enfin, on peut inversement étudier sur la figure certaines propriétés géométriques auxquelles correspondent des propriétés du système d'équations, qui peuvent être formulées en théorèmes ne mentionnant explicitement que des circonstances relatives à ces équations. On a ainsi des théorèmes d'*algèbre*.

Les applications de cette méthode sont rares; nous n'en citerons pas d'exemple.

Supposons qu'à la première figure on substitue la seconde.

Les propriétés d'équations qui ont conduit à des théorèmes de géométrie analytique ou de géométrie pure concernant la première figure conduiront à des théorèmes correspondants concernant la deuxième.

Par conséquent :

En géométrie analytique, à tout théorème cartésien correspond un théorème tangentiel; et réciproquement, à tout théorème tangentiel correspond un théorème cartésien.

Ce principe exprime la *dualité* de deux méthodes réellement distinctes bien qu'elles procèdent par des moyens analogues : c'est la *corrélation* entre la géométrie cartésienne et la géométrie tangentielle.

En géométrie pure, les théorèmes analogues ou *corrélatifs* ne se rapportent plus à deux méthodes distinctes, mais à des propriétés mêmes de l'étendue. Là est la véritable *dualité* géométrique, qui peut être définie en ces termes :

A toute propriété de l'étendue en correspond une corrélative.

3. *Des propriétés descriptives et des propriétés métriques.*

Ainsi, par *théorèmes corrélatifs* nous désignons deux théorèmes de géométrie pure, résultant des interprétations géométriques d'une même propriété, d'un même système d'équations, considéré successivement en géométrie cartésienne et en géométrie tangentielle.

Nous appelons *figures corrélatives* les deux figures qui donnent naissance à deux théorèmes corrélatifs.

On distingue habituellement les propriétés des figures en propriétés *descriptives* et propriétés *métriques*. Les premières ne mentionnent pas explicitement des circonstances numériques; tel est le théorème de Pascal énoncé plus haut. Les secondes, au contraire, mentionnent explicitement des circonstances numériques, comme, par exemple, le théorème de Newton.

La transformation *corrélative* d'une propriété descriptive est généralement facile, et l'intuition donnée par l'habitude de la géométrie permet presque toujours de la faire *à priori*.

Il n'en est pas ainsi de la transformation corrélative d'une propriété métrique; elle exige souvent des raisonnements compliqués. Une propriété métrique, remarquablement simple, peut correspondre corrélativement à une propriété métrique si compliquée, qu'il n'y a pas d'intérêt à formuler celle-ci par un théorème. Souvent la dualité est purement théorique pour les propriétés métriques des figures.

Nous avons vu la dualité se manifester dans les théories des pôles et polaires cartésiens et tangentiels.

Elle se présente aussi dans d'autres théories; la suite de cet ouvrage en fournira des exemples.

LIVRE IV.

CENTRES ET AXES DES MOYENNES HARMONIQUES. — TRANSVERSALES ET SOMMETS.

CHAPITRE PREMIER.

AXES ET CENTRES DES MOYENNES HARMONIQUES.

Les polygones sont déterminés, soit par leurs côtés, soit par leurs sommets; on peut donc les considérer, soit comme des systèmes de droites non convergentes, soit comme des systèmes de points non en ligne droite. Sous le premier point de vue, ils constituent des courbes géométriques particulières, d'un degré égal au nombre des côtés; sous le second, ils constituent des courbes géométriques particulières, d'une classe égale au nombre des sommets.

Nous étudierons d'abord les polygones sous ces deux points de vue, et nous passerons de là à l'étude des courbes géométriques en général.

§ I. — Polygones définis par leurs côtés.

1. *Polaires cartésiennes d'un point, relativement à un système de p droites.*

Un système de p droites constituant une courbe algébrique du degré p donne naissance à des polaires cartésiennes des

(*) Les centres des moyennes harmoniques ont été l'objet d'un beau Mémoire de M. Poncelet, qui a fait connaître leurs principales propriétés. (Voir *Journal de Crelle*, t. III, année 1828.)

ordres 1, 2,..., $(p-2)$, $(p-1)$, et des degrés $(p-1)$, $(p-2)$,..., 2, 1, d'un point quelconque du plan.

Ces polaires sont généralement des lignes courbes et ne se réduisent à des systèmes de droites que dans certains cas particuliers, c'est-à-dire pour certaines positions particulières des pôles.

Toute droite du système entre dans la polaire d'ordre quelconque de chacun de ses points, en sorte que la polaire d'ordre n d'un point pris sur une des droites données se compose de cette droite et d'une courbe compagne du degré $(p-n-1)$. Les polaires des ordres 1 et $p-1$ présentent des propriétés remarquables que nous allons étudier.

2. *Polaires du premier ordre.*

Le système de droites étant considéré comme une courbe géométrique, tout *sommet* du polygone, c'est-à-dire tout point d'intersection de deux droites du système, joue dans cette courbe le rôle d'un *point singulier*. Donc :

Toute polaire cartésienne du premier ordre passe par tous les sommets du polygone.

Le nombre de ces sommets est égal à $\frac{p(p-1)}{2}$; comme, d'ailleurs, les polaires du premier ordre des différents points d'une droite doivent pivoter autour des pôles harmoniques de cette droite, lesquels sont au nombre de $(p-1)^2$, on voit que :

Les pôles harmoniques d'une droite se composent des sommets du polygone et d'un groupe de $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ *points.*

On distingue donc dans le système des pôles harmoniques d'une droite deux groupes de points distincts, dont l'un, composé des sommets du polygone, est indépendant de la droite et ne la caractérise en rien, tandis que le second varie quand cette droite se déplace, et constitue ses pôles harmoniques caractéristiques.

3. *Polaires harmoniques.*

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_p$ les droites données, et X un point situé dans leur plan.

La polaire harmonique C de ce point, qu'on peut encore appeler *axe des moyennes harmoniques* du système donné relatif au point X, jouit des propriétés suivantes.

Menons par X une droite quelconque M, et prenons ses intersections avec les droites données.

L'harmonique de X, relativement au système de points en ligne droite ainsi formé, sera situé sur C, quelle que soit la droite M.

Prenons maintenant un point arbitraire P, et joignons-le à X. Joignons ensuite ce dernier aux points

$$(M, A_1), \quad (M, A_2), \ldots, \quad (M, A_p),$$

nous aurons un faisceau de droites convergentes relativement auxquelles l'harmonique de PX sera une droite H passant par le point (M, C); par conséquent, le point (M, H) sera situé sur C, quels que soient la droite M et le point P.

Une droite du plan, considérée comme *axe des moyennes harmoniques* du système donné, correspond à chaque élément d'un groupe de $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ points.

4. *Propriétés analytiques.*

L'équation algébrique du degré p qui représente le système de droites donné peut être mise sous la forme

$$f(x,y)=(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)\ldots(a_px+b_py+c_p)=0.$$

L'équation

$$(x-\alpha)f'_x+(y-\beta)f'_y-pf=0$$

de la polaire du premier ordre du point (α, β) devient alors

$$\frac{a_1\alpha+b_1\beta+c_1}{a_1x+b_1y+c_1}+\frac{a_2\alpha+b_2\beta+c_2}{a_2x+b_2y+c_2}+\ldots+\frac{a_p\alpha+b_p\beta+c_p}{a_px+b_py+c_p}=0,$$

et l'équation de la polaire harmonique du même point prend la forme

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_1\alpha+b_1\beta+c_1}+\frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_2\alpha+b_2\beta+c_2}+\ldots+\frac{a_px+b_py+c_p}{a_p\alpha+b_p\beta+c_p}=0.$$

Par conséquent, si $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ représentent les distances du point $(x; y)$ aux droites du système donné, et si $d_1, d_2, \ldots, d_p$ représentent les distances du point (α, β) à ces mêmes droites, on a la relation

$$\frac{\delta_1}{d_1}+\frac{\delta_2}{d_2}+\ldots+\frac{\delta_p}{d_p}=0\ (*),$$

laquelle existe pour chaque point (x, y) de la polaire harmonique.

De là ce théorème :

Théorème LVI. — *Les distances de chaque point d'un axe des moyennes harmoniques d'un système de droites, aux diverses droites de ce système, ont entre elles une relation linéaire homogène.*

D'autre part, si l'on désigne par $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ les *inverses* des distances du point (x, y) de la polaire du premier ordre du point (α, β) aux droites du système donné, on a la relation

$$d_1\rho_1+d_2\rho_2+\ldots+d_p\rho_p=0$$

pour chaque point de la polaire. De là ce théorème :

Théorème LVII. — *Les inverses des distances de chaque point d'une polaire du premier ordre, relative à un système de droites, aux diverses droites de ce système, ont entre elles une relation linéaire homogène.*

(*) Le rapport $\frac{\delta_n}{d_n}$ doit être regardé comme positif ou comme négatif, suivant que les points (x, y) et (α, β) sont situés d'un même côté de la polaire harmonique ou de part et d'autre de cette droite. Une observation analogue s'applique à la formule suivante en $d_n\rho_n$.

Une droite quelconque du plan pouvant toujours être regardée comme un axe des moyennes harmoniques d'un système quelconque de droites non convergentes, le théorème LVI exprime une propriété générale de la droite, laquelle peut s'énoncer ainsi :

Les distances de chaque point d'une droite à plusieurs axes fixes non convergents ont entre elles une relation linéaire homogène (*).

Dans cette relation trois paramètres seulement sont arbitraires; si l'on se donne ces trois paramètres, α et β, et par suite tous les autres paramètres de l'équation, se trouvent déterminés.

5. *Propriété mécanique.*

Reprenons le système de droites $A_1, A_2, \ldots, A_p$, le point X et l'axe des moyennes harmoniques C du système relativement à ce point.

Nous pouvons regarder les droites données comme des forces $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ inversement proportionnelles aux distances de ces droites au point X. Si l'on désigne par $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ les distances de ces mêmes droites à un point quelconque I de la droite C, on aura

$$\varphi_1 \delta_1 + \varphi_2 \delta_2 + \ldots + \varphi_p \delta_p = 0 \quad (^{**}).$$

Cette relation exprime que la somme des moments des forces relativement au point I est nulle.

Elle a lieu quelle que soit la position du point I sur la

(*) Cette propriété de la droite est énoncée par M. Chasles, à la page 320 de la *Géométrie supérieure*. Les chapitres XXI et XXII de ce même ouvrage contiennent plusieurs théorèmes que nous retrouverons dans le paragraphe suivant.

(**) La force φ_n doit être dirigée sur la droite A_n, de manière que le moment de cette force, relativement au point X, soit positif si I et X sont d'un même côté de A_n, ou négatif si I et X sont situés de part et d'autre de A_n.

droite C; par conséquent cette droite représente en position la résultante des forces considérées. De là ce théorème :

Théorème LVIII. — *L'axe des moyennes harmoniques d'un système de droites relatif à un point coïncide, en position, avec la résultante de ces mêmes droites considérées comme des forces d'intensités inversement proportionnelles à leurs distances à ce point.*

Si l'on suppose que X aille à l'infini, dans une direction quelconque, on arrive à cette conséquence :

Théorème LIX. — *L'axe des moyennes harmoniques d'un système de droites, relativement à un point à l'infini, coïncide en position avec la résultante de ces mêmes droites, considérées comme des forces d'intensités inversement proportionnelles au sinus des angles que font leurs directions avec celle du point à l'infini.*

6. *Théorème relatif au triangle.*

Pour faire une application de la théorie précédente, nous démontrerons une propriété connue du triangle.

Étant donné un triangle ABC et une droite X, les polaires du prémier ordre de tous les points de cette droite sont des coniques passant par les trois sommets du triangle et par un quatrième point P dépendant de la droite.

Considérons en particulier le point a où X rencontre le côté BC.

La polaire de ce point se compose de deux droites, savoir : le côté BC du triangle, et la droite qui joint le sommet A au conjugué harmonique de a relativement à BC.

Cette seconde droite doit nécessairement passer par P. De là ce théorème :

Théorème LX. — *Si dans le plan d'un triangle on mène une transversale quelconque, et si sur chaque côté on prend le conjugué harmonique de son point de rencontre avec la transversale, relativement aux deux sommets adjacents, les droites qui joindront les trois points ainsi déterminés aux sommets respectivement opposés passeront par un même point.*

§ II. — Polygones définis par leurs sommets.

7. *Pôles tangentiels d'une droite relativement à un système de p points.*

Un système de p points constituant une courbe géométrique particulière, de la classe p, donne naissance à des pôles tangentiels, des ordres $1, 2, \ldots, (p-1)$ et des classes $(p-1)$, $(p-2), \ldots, 2, 1$ d'une droite quelconque du plan.

Tout point du système entre isolément dans le pôle tangentiel d'ordre quelconque de toute droite passant par ce point; il en résulte que le pôle tangentiel d'ordre n d'une droite, passant par un des points donnés, se compose de ce point et d'une courbe compagne de la classe $(p-n-1)$.

Les pôles tangentiels des ordres 1 et $(p-1)$ exigent une étude particulière.

8. *Pôles du premier ordre.*

Le système de points étant considéré comme une courbe géométrique, tout *côté* du polygone, c'est-à-dire toute droite joignant deux des points donnés, joue, dans cette courbe, le rôle d'une *tangente singulière.*

Donc :

Tout pôle tangentiel du premier ordre est tangent à tous les côtés du polygone.

Le nombre de ces côtés est égal à $\frac{p(p-1)}{2}$.

Par conséquent :

Les polaires harmoniques tangentielles d'un point se composent des côtés du polygone et d'un groupe de $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ *droites.*

Ce dernier groupe est caractéristique pour le point que l'on considère.

9. *Pôles harmoniques.*

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_p$ les points donnés et X une droite située dans leur plan.

Le pôle harmonique tangentiel C de cette droite, qu'on peut encore appeler *centre des moyennes harmoniques* du système donné, relatif à la droite X, jouit des propriétés suivantes.

Prenons sur X un point quelconque M, et joignons-le aux points donnés. La droite harmonique de X, relativement au système convergent ainsi obtenu, passera par C, quel que soit le point M.

Menons, d'autre part, une transversale arbitraire P, coupant X en un point (P, X). Cette transversale coupera les droites MA_1, MA_2,..., MA_p en des points relativement auxquels l'harmonique H de (P, X) sera situé sur la droite MC. Par conséquent la droite MH passera par C, quels que soient le point M et la transversale P.

10. *Propriété mécanique.*

Prenons M pour origine des coordonnées, X pour axe des abscisses, et MV, perpendiculaire à cette droite, pour axe des ordonnées.

Nous représenterons par $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_p, y_p)$ les coordonnées des points donnés, par ξ et η les coordonnées du point C.

En projetant sur MV les points donnés, la droite X et le point C, nous formerons un système de points, le point M et son harmonique relativement à ce système.

Nous aurons donc

$$(1) \qquad \frac{p}{\eta} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \ldots + \frac{1}{y_p}.$$

On a d'ailleurs identiquement

$$(2) \qquad \frac{p}{\eta}\eta = \frac{1}{y_1}y_1 + \frac{1}{y_2}y_2 + \ldots + \frac{1}{y_p}y_p.$$

En outre les droites MA_1, MA_2,..., MA_p, MX et MC satisfont à la relation

$$\frac{p}{\operatorname{tang} XMC} = \frac{1}{\operatorname{tang} XMA_1} + \frac{1}{\operatorname{tang} XMA_2} + \ldots + \frac{1}{\operatorname{tang} XMA_p},$$

laquelle équivaut à

$$(3) \qquad \frac{p}{\eta}\xi = \frac{1}{y_1}x_1 + \frac{1}{y_2}x_2 + \ldots + \frac{1}{y_p}x_p.$$

Les équations (1), (2) et (3) expriment que :

Théorème LXI. — *Le centre des moyennes harmoniques d'un système de points relatif à une droite n'est autre que le centre de gravité de ces mêmes points supposés matériels et doués de masses inversement proportionnelles à leurs distances à la droite* (*).

En supposant que la droite X aille à l'infini, on arrive à cette conséquence :

Théorème LXII. — *Le centre des moyennes harmoniques d'un système de points relativement à la droite à l'infini n'est autre que le centre des moyennes distances de ces points.*

Un point du plan considéré comme centre des moyennes harmoniques du système donné correspond à chaque élément d'un groupe de $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ droites.

11. *Propriété analytique.*

Reprenons le système de points $A_1, A_2, \ldots, A_p$, non en ligne droite, la droite X située dans leur plan, et le centre des moyennes harmoniques C du système relatif à cette droite; menons par C une droite quelconque CZ.

Le point C étant le centre de gravité des points donnés supposés matériels et doués de masses inversement proportionnelles à leurs distances $d_1, d_2, \ldots, d_p$ à la droite X, les distances $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ de ces mêmes points à la droite CZ satisfont, quelle que soit cette droite, à la relation

$$\frac{\delta_1}{d_1} + \frac{\delta_2}{d_2} + \ldots + \frac{\delta_p}{d_p} = 0.$$

(*) Les *masses* dont il est question dans ce théorème peuvent être des quantités négatives. Le signe de la masse qu'il faut attribuer au point A_n dépend du sens de la perpendiculaire qu'on peut abaisser de ce point sur la droite X.

De là ce théorème :

THÉORÈME LXIII. — *Les distances de toute droite passant par le centre des moyennes harmoniques d'un système de points, aux divers points de ce système, ont entre elles une relation linéaire homogène.*

Un point quelconque pouvant toujours être regardé comme un centre des moyennes harmoniques d'un système de points non en ligne droite, le théorème précédent exprime une propriété générale du point, laquelle peut s'énoncer ainsi :

Les distances de toute droite passant par un point, à plusieurs points non en ligne droite, ont entre elles une relation linéaire homogène.

Dans cette relation, trois paramètres seulement sont arbitraires et suffisent pour déterminer le point par lequel sont menées les droites convergentes.

12. *Théorème relatif au triangle.*

Pour faire une application de la théorie précédente, on peut, par un raisonnement analogue à celui que nous avons employé au n° 5, établir la propriété suivante du triangle :

THÉORÈME LXIV. — *Les polaires d'un même point relatives aux trois angles d'un triangle rencontrent respectivement les côtés opposés en trois points situés en ligne droite.*

§ III. — COURBES GÉOMÉTRIQUES EN GÉNÉRAL.

13. *Axe des moyennes harmoniques.*

Considérons une courbe géométrique et un point P situé dans son plan.

Par ce point menons une droite PZ. Elle coupera la courbe en des points, en nombre égal au degré de cette courbe, par chacun desquels nous mènerons la tangente à la courbe.

Ce système de tangentes peut être substitué à la courbe elle-même lorsqu'il s'agit de déterminer la *polaire harmonique cartésienne* du point P, car la polaire harmonique de ce point

relativement à la courbe donnée et sa polaire harmonique relativement au système de tangentes coupent aux mêmes points deux droites issues du point P et infiniment voisines de PZ.

Donc :

THÉORÈME LXV. — *Si par un point* P, *pris dans le plan d'une courbe algébrique, on mène une sécante quelconque, et si l'on prend les tangentes aux points d'intersection, l'axe des moyennes harmoniques de ce système de droites, relativement au point* P, *sera la polaire harmonique cartésienne de ce point, relativement à la courbe donnée.*

En raison de cette propriété, la polaire harmonique cartésienne du point P peut s'appeler *l'axe des moyennes harmoniques* de la courbe relativement à ce point.

14. *Propriété mécanique.*

Le théorème précédent peut être énoncé sous une autre forme qui n'exige pas la notion des polaires harmoniques.

THÉORÈME LXVI. — *Si par un point* P, *pris dans le plan d'une courbe algébrique, on mène une sécante quelconque, et si l'on prend les tangentes aux points d'intersection, la position de la résultante de ces droites, considérées comme des forces d'intensités inversement proportionnelles à leurs distances au point* P, *sera indépendante de la direction de la sécante.*

15. *Centre des moyennes harmoniques.*

Considérons maintenant une droite X située dans le plan de la courbe.

Si par un point quelconque M de cette droite nous menons les tangentes à la courbe, les points de contact formeront un polygone qui pourra être substitué à la courbe elle-même, pour déterminer le pôle harmonique tangentiel de X.

Donc :

THÉORÈME LXVII. — *Si d'un point quelconque d'une droite* X *on mène les tangentes à une courbe géométrique, le*

centre des moyennes harmoniques du système des points de contact relativement à la droite X *sera le pôle harmonique tangentiel de cette droite relativement à la courbe donnée.*

En raison de cette propriété, le pôle harmonique tangentiel de la droite X peut s'appeler *le centre des moyennes harmoniques* de la courbe relativement à cette droite.

16. *Propriété mécanique.*

Le théorème précédent peut être énoncé sous une autre forme, qui n'exige pas la notion du pôle harmonique tangentiel.

THÉORÈME LXVIII. — *Si d'un point quelconque d'une droite* X *on mène les tangentes à une courbe géométrique, la position du centre de gravité du système des points de contact, considérés comme doués de masses inversement proportionnelles à leurs distances à la droite, sera indépendante du point pris sur la droite* X.

En supposant que la droite X aille à l'infini, on arrive à ce théorème, dû à M. Liouville :

THÉORÈME LXIX. — *Si l'on mène à une courbe géométrique les tangentes parallèles à une direction, la position du centre des moyennes distances des points de contact sera indépendante de cette direction.*

(*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VI.

CHAPITRE II.

THÉORIE DES TRANSVERSALES.

1. *Sens géométrique de l'expression* $f(\alpha, \beta)$.

Prenons des coordonnées rectangulaires, et soit

$$f(x, y) = 0$$

l'équation cartésienne d'une courbe géométrique du degré p.

Par un point arbitraire P, dont les coordonnées sont α et β, menons une transversale PQ, dont la direction ascendante fera avec le sens positif de l'axe des x un angle égal à φ.

Cette sécante rencontre la courbe en des points $M_1, M_2, \ldots, M_p$. Désignons par $z_1, z_2, \ldots, z_p$ les segments $PM_1, PM_2, \ldots, PM_p$, ces quantités seront les racines de l'équation

$$f(\alpha + z\cos\varphi, \beta + z\sin\varphi) = 0,$$

algébrique, entière, et du degré p par rapport à la variable z. En ordonnant par puissances décroissantes, on trouve

$$f(\alpha + z\cos\varphi, \beta + z\sin\varphi) = Kz^p + A_1 z^{p'} + \ldots + f(\alpha, \beta) = 0.$$

K dépend de l'angle φ et des divers coefficients du polynôme $f(x, y)$, mais ni de α ni de β.

On a donc

$$(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_p) = \frac{f(\alpha, \beta)}{K},$$

K désignant une quantité constante pour toutes les positions possibles du point P sur la droite PQ.

De là ce théorème :

THÉORÈME LXX. — *Le produit des distances des points d'intersection d'une sécante avec la courbe géométrique*

$f(x,y)=0$, à un point quelconque (α, β) de la sécante, est proportionnel à l'expression $f(\alpha, \beta)$.

2. *Théorème de Carnot.*

Soit un triangle ABC, situé dans le plan d'une courbe géométrique du degré p, définie par l'équation cartésienne

$$f(x,y)=0.$$

Les côtés BC, AC et AB coupent respectivement cette courbe aux points

$$\begin{array}{llll} a_1, & a_2, \ldots, & a_p, \\ b_1, & b_2, \ldots, & b_p, \\ c_1, & c_2, \ldots, & c_p. \end{array}$$

Si nous appelons (α, α'), (β, β'), (γ, γ'), les coordonnées des sommets A, B, C, nous aurons, en vertu du théorème précédent,

$$\frac{Ab_1 \times Ab_2 \times \ldots \times Ab_p}{Cb_1 \times Cb_2 \times \ldots \times Cb_p} = \frac{f(\alpha, \alpha')}{f(\gamma, \gamma')},$$

$$\frac{Ca_1 \times Ca_2 \times \ldots \times Ca_p}{Ba_1 \times Ba_2 \times \ldots \times Ba_p} = \frac{f(\gamma, \gamma')}{f(\beta, \beta')},$$

$$\frac{Bc_1 \times Bc_2 \times \ldots \times Bc_p}{Ac_1 \times Ac_2 \times \ldots \times Ac_p} = \frac{f(\beta, \beta')}{f(\alpha, \alpha')}.$$

En multipliant ces inégalités membre à membre, on trouve

$$\frac{Ab_1 \times Ab_2 \times \ldots \times Ab_p}{Ac_1 \times Ac_2 \times \ldots \times Ac_p} \times \frac{Bc_1 \times Bc_2 \times \ldots \times Bc_p}{Ba_1 \times Ba_2 \times \ldots \times Ba_p} \times \frac{Ca_1 \times Ca_2 \times \ldots \times Ca_p}{Cb_1 \times Cb_2 \times \ldots \times Cb_p} = 1.$$

De là ce théorème dû à Carnot (*) :

(*) *Géométrie de position*, p. 291 et 436.

THÉORÈME LXXI. — *Quand une courbe géométrique du degré p rencontre les côtés d'un triangle en des points* a_1, $a_2, \ldots, a_p$ *sur* BC; $b_1, b_2, \ldots, b_p$ *sur* AC; $c_1, c_2, \ldots, c_p$ *sur* AB, *on a la relation*

$$\frac{Ab_1 \times Ab_2 \times \ldots \times Ab_p}{Ac_1 \times Ac_2 \times \ldots \times Ac_p} \times \frac{Bc_1 \times Bc_2 \times \ldots \times Bc_p}{Ba_1 \times Ba_2 \times \ldots \times Ba_p} \times \frac{Ca_1 \times Ca_2 \times \ldots \times Ca_p}{Cb_1 \times Cb_2 \times \ldots \times Cb_p} = 1.$$

Ce théorème peut être étendu à un polygone quelconque.

3. *Théorème de Newton.*

Soit toujours

$$f(x, y) = 0$$

l'équation d'une courbe algébrique du degré p. On a

$$f(x, y) = A_0 x^p + B_0 y^p + \ldots + K.$$

Si l'on transporte l'origine des coordonnées au point $P(\alpha, \beta)$, et si l'on prend des axes PX', PYY', parallèles aux axes primitifs, l'équation de la courbe deviendra

$$f(x' + \alpha, y' + \beta) = A_0 x'^p + B_0 y'^p + \ldots + f(\alpha, \beta) = 0.$$

Cela posé, soient $M_1, M_2, \ldots, M_p$, les points où la courbe coupe le nouvel axe des x, et par $N_1, N_2, \ldots, N_p$, ceux où elle coupe le nouvel axe des y; les segments $PM_1, PM_2, \ldots, PM_p$ sont les racines de l'équation

$$f(x' + \alpha, \beta) = 0,$$

et les segments $PN_1, PN_2, \ldots, PN_p$ les racines de l'équation

$$f(\alpha, y' + \beta) = 0.$$

Par conséquent

$$PM_1 \times PM_2 \times \ldots \times PM_p = \frac{f(\alpha, \beta)}{A_0},$$

$$PN_1 \times PN_2 \times \ldots \times PN_p = \frac{f(\alpha, \beta)}{B_0}.$$

D'où l'on déduit

$$\frac{PM_1 \times PM_2 \times \ldots \times PM_p}{PN_1 \times PN_2 \times \ldots \times PN_p} = \frac{B_0}{A_0}.$$

Le second membre reste constant, quel que soit le point P où l'on transporte l'origine. De là ce théorème, attribué à Newton (*) :

THÉORÈME LXXII. — *Si par un point* P *on mène, dans le plan d'une courbe géométrique, deux transversales parallèles à deux axes fixes, les produits des segments, réels ou imaginaires, formés sur ces deux droites entre le point* P *et la courbe, ont un rapport constant, quel que soit* P.

4. *Application du théorème de Newton à la construction des tangentes.*

Le théorème de Newton donne un moyen simple de construire géométriquement la tangente à une courbe lorsque cette courbe est entièrement tracée.

Cette observation est due à M. Chasles (**).

Soit m le point où l'on veut mener la tangente.

Prenons un point P quelconque et un autre point ϖ voisin de m, mais non situé sur la courbe. Par chacun de ces points menons deux transversales parallèles à deux axes fixes. Nous aurons, par le théorème de Newton,

$$\frac{PA_1 \times PA_2 \times \ldots \times PA_p}{PB_1 \times PB_2 \times \ldots \times PB_p} = \frac{\varpi\alpha_1 \times \varpi\alpha_2 \times \ldots \times \varpi\alpha_p}{\varpi\beta_1 \times \varpi\beta_2 \times \ldots \times \varpi\beta_p}.$$

La droite α_1, β_1, infiniment petite, est l'élément de la courbe au point m, et devient à la limite, c'est-à-dire quand ϖ vient en m, la tangente en ce point. La formule ci-dessus donne alors

$$\lim \frac{\varpi\alpha_1}{\varpi\beta_1} = f = \frac{PA_1 \times PA_2 \times \ldots \times PA_p}{PB_1 \times PB_2 \times \ldots \times PB_p} \times \frac{m\beta_2 \times \ldots \times m\beta_p}{m\alpha_2 \times \ldots \times m\alpha_p}.$$

Si donc on porte, à partir du point m, et sur les deux trans-

(*) *De ratione contentorum sub parallelarum segmentis.*

(**) *Aperçu historique*, note, p. 221.

versales issues de ce point, des longueurs ayant entre elles le rapport f, la droite qui joindra leurs extrémités sera parallèle à la tangente cherchée.

5. *Application du théorème de Carnot à la construction du cercle osculateur.*

Le théorème de Carnot donne un moyen général de construire le cercle osculateur à une courbe (*).

Soit m le point considéré.

Prenons le sommet A du triangle dans le voisinage extrême du point m; dirigeons le côté AB parallèlement à la tangente en m; prenons AC et BC quelconques.

Les trois points c_1, c_2, b_1, seront infiniment voisins de m, et le cercle passant par ces trois points deviendra à la limite, c'est-à-dire lorsque A viendra en m, le cercle osculateur cherché.

Le côté AC, qui rencontre en b_1 le cercle $(b_1 c_1 c_2)$, coupe ce cercle en un nouveau point ρ.

Il s'agit de déterminer la valeur limite de $A\rho$.

On a, par une propriété connue du cercle,

$$A\rho = \frac{Ac_1 \times Ac_2}{Ab_1},$$

et le théorème de Carnot donne

$$\begin{aligned} A\rho = &\frac{Ab_2 \times \ldots \times Ab_p}{Ac_3 \times \ldots \times Ac_p} \\ &\times \frac{Bc_1 \times Bc_2 \times \ldots \times Bc_p}{Ba_1 \times Ba_2 \times \ldots \times Ba_p} \\ &\times \frac{Ca_1 \times Ca_2 \times \ldots \times Ca_p}{Cb_1 \times Cb_2 \times \ldots \times Cb_p}. \end{aligned}$$

Passant à la limite, on trouve

$$\begin{aligned} \lim A\rho = &\frac{mb_2 \times \ldots \times mb_p}{mc_3 \times \ldots \times mc_p} \\ &\times \frac{Bm^2 \times Bc_3 \times \ldots \times Bc_p}{Ba_1 \times Ba_2 \times \ldots \times Ba_p} \\ &\times \frac{Cm \times Ca_3 \times \ldots \times Ca_p}{Cb_2 \times \ldots\ldots\ldots \times Cb_p}. \end{aligned}$$

(*) *Aperçu historique.*

6. *Théorème relatif aux intersections de deux courbes.*

Lorsqu'un groupe de p^2 points résulte des intersections de deux courbes du degré p, et, par conséquent, est *pivotable* par une courbe du degré p, les points de ce groupe ne sont pas tous arbitraires.

Toute courbe du degré p qui passe par $\frac{p^2+3p-2}{2}$ de ces points passe nécessairement par les $\frac{p^2-3p+2}{2}$ autres.

On en déduit que :

Théorème LXXIII. — *Si pq points d'intersection de deux courbes du degré p sont une courbe du degré q, les $p(p-q)$ autres points appartiennent à une courbe du degré (pq).*

En effet, sur ces $p(p-q)$ points, prenons-en $\frac{(p-q)(p-q+3)}{2}$, par lesquels nous ferons passer une courbe du degré $(p-q)$; cette courbe et la courbe du degré q forment ensemble une courbe du degré p, laquelle passe par $\frac{p^2+3p+q(q-3)}{2}$ des pivots donnés. Ce dernier nombre est au moins égal à $\frac{p^2+3p-2}{2}$, donc la courbe composée dont il s'agit passe par tous les pivots.

Or la courbe du degré q ne peut pas contenir plus de pq pivots, sans quoi elle couperait chacune des deux courbes données en plus de pq points; donc les $p(p-q)$ pivots restants sont à une courbe du degré $(p-q)$.

7. *Application de ce théorème.*

En particulier, *si trois des neuf points d'intersection de deux courbes du troisième degré sont en ligne droite, les six autres sont à une simple conique;* et, réciproquement, *si six de ces neuf points sont à une conique, les trois autres sont à une droite.*

Considérons une conique et un hexagone inscrit $a_1, a_2, \ldots, a_6$. Les trois côtés non consécutifs (a_1, a_2), (a_3, a_4), (a_5, a_6), constituent une courbe du troisième degré passant par les six sommets. Il en est de même des trois côtés opposés (a_4, a_5), (a_6, a_7), (a_2, a_3).

Ces deux courbes du troisième degré se coupent en neuf points, savoir : les six sommets de l'hexagone et les trois points α, β, γ, résultant des intersections des côtés opposés. Les six premiers points sont sur une conique; donc les trois autres sont en ligne droite.

Par conséquent :

THÉORÈME DE PASCAL. — *Lorsqu'un hexagone est inscrit dans une conique, les trois points de concours des côtés opposés sont en ligne droite.*

8. *Propriétés des transversales.*

Coupons une courbe du degré p par une transversale A, et par chaque point d'intersection menons une sécante arbitraire.

Ces sécantes, au nombre de p, forment une courbe du degré p, qui coupe en p^2 points la courbe donnée. Comme p de ces points sont à la droite A, les $p(p-1)$ autres sont à une courbe du degré $(p-1)$. Donc :

THÉORÈME LXXIV. — *Si, par chaque point d'intersection d'une courbe du degré p et d'une droite* A, *on mène une transversale arbitraire, les $p(p-1)$ points d'intersection (non situés sur* A) *des transversales et de la courbe sont à une ligne du degré $(p-1)$* (*).

Considérons maintenant deux transversales quelconques A et B qui couperont la courbe en des points $a_1, a_2, \ldots, a_p$ et $b_1, b_2, \ldots, b_p$. Formons avec ces deux séries de points p

(*) Ce théorème est dû à M. Poncelet. *Voir* Mémoire sur la théorie des transversales (*Journal de Crelle*, année 1832, p. 129).

couples (a_1, b_1), $(a_2, b_2), \ldots, (a_p, b_p)$, dont les éléments sont pris sur chaque droite, sans double emploi d'aucun d'entre eux.

Les cordes ou sécantes a_1b_1, $a_2b_2, \ldots$, a_pb_p, forment une courbe du degré p, qui rencontre en p^2 points la courbe donnée. $2p$ de ces points étant situés sur la conique formée par nos deux transversales, les $p(p-2)$ autres points sont à une ligne du degré $(p-2)$.

Par conséquent :

THÉORÈME LXXV. — *Si par les points d'intersection de deux transversales et d'une courbe du degré p on fait passer un système de p droites telles, que chacune d'elles joigne deux points pris respectivement sur chacune des sécantes et que deux d'entre elles ne se coupent pas sur une des transversales, les $p(p-2)$ points d'intersection de ces droites et de la courbe seront à une ligne du degré $(p-2)$.*

Si l'on suppose que les points $b_1, b_2, \ldots, b_p$ tendent respectivement vers $a_1, a_2, \ldots, a_p$, ce qui a lieu lorsque B tend vers A, on arrive à ce nouveau théorème, dû à M. Poncelet :

THÉORÈME LXXVI. — *Le système des tangentes menées à une courbe du degré p aux points où elle est rencontrée par une transversale quelconque, rencontre cette courbe en $p(p-2)$ points qui sont à une ligne du degré $(p-2)$.*

Ces théorèmes sont d'un grand usage dans la théorie des courbes du troisième degré.

En particulier, on peut prendre pour transversale la droite à l'infini, et l'on arrive à cette nouvelle propriété des courbes géométriques.

THÉORÈME LXXVII. — *Les $p(p-2)$ points d'intersection d'une courbe du degré p avec ses propres asymptotes sont à une ligne du degré $(p-2)$.*

Au lieu de deux transversales, on peut considérer une conique quelconque, et l'on arrive à cette conséquence :

THÉORÈME LXXVIII. — *Si par les $2p$ points d'intersection*

d'une conique et d'une courbe du degré p on fait passer un système de p droites telles, que deux d'entre elles ne se coupent pas sur la conique, les $p(p-2)$ points d'intersection (non situés sur la conique) de ces droites avec la courbe sont à une courbe du degré $(p-2)$.

Ce théorème renferme, comme cas particulier, le théorème LXXV.

9. *Polygones inscrits dans les coniques. Généralisation du théorème de Pascal.*

Si l'on se donne un polygone de $2p$ sommets inscrits dans une conique, les $2p$ côtés de ce polygone pourront être rangés en deux groupes tels, que chaque côté du premier aura son opposé dans l'autre groupe. On a ainsi des *groupes opposés*.

Soient G et H ces deux groupes. Chacun d'eux peut être regardé comme une courbe du degré p. Les deux courbes ainsi définies coupent aux mêmes points la conique donnée; donc les $p(p-2)$ points d'intersection de ces deux courbes, non situées sur la conique, sont à une courbe du degré $(p-2)$. De là ce théorème :

THÉORÈME LXXIX. — *Lorsqu'un polygone d'un nombre de sommets pair est inscrit dans une conique, les points d'intersection, non situés sur la conique, des groupes opposés formés par les côtés de ce polygone, sont à une courbe d'un degré égal à la moitié moins deux du nombre des sommets du polygone.*

C'est la généralisation du théorème de Pascal sur l'hexagone.

Considérons maintenant un polygone de p côtés, inscrit dans une conique, et par chaque sommet menons la tangente à la courbe. Nous formerons ainsi un nouveau polygone de p côtés. Nos deux polygones peuvent être regardés comme deux courbes du degré p. Ces deux courbes se coupent en p^2 points, dont $2p$ sont situés sur la conique; donc les $p(p-2)$ autres

points d'intersection sont à une courbe du degré $(p-2)$. De là ce théorème qu'on aurait pu déduire du précédent :

THÉORÈME LXXX. — *Lorsqu'un polygone est inscrit dans une conique, si l'on forme un autre polygone en menant, par les sommets du premier, les tangentes à la conique, les points d'intersection des côtés de ces polygones sont à une courbe d'un degré inférieur de deux unités au nombre de leurs côtés.*

CHAPITRE III.

THÉORIE DES SOMMETS.

1. *Définition des sommets.*

Aux points d'intersection d'une courbe avec une ligne droite, en géométrie cartésienne, correspondent, en géométrie tangentielle, les tangentes à une courbe issues d'un même point.

Donc à la théorie cartésienne des transversales doit correspondre la théorie tangentielle des *sommets*, c'est-à-dire des points par lesquels on mène toutes les tangentes à une courbe géométrique.

2. *Théorème de M. Chasles.*

Le théorème de Carnot sur le triangle a son analogue en géométrie tangentielle, lequel s'énonce en ces termes :

THÉORÈME LXXXI.— *Étant pris dans le plan d'une courbe géométrique un triangle dont les côtés sont* A, B, C, *si par les sommets de ce triangle on mène toutes les tangentes à la courbe, et si l'on désigne par* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ *les tangentes issues du sommet opposé à* A, *par* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ *les tangentes issues du sommet opposé à* B, *et par* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ *les tangentes issues du sommet opposé à* C, *on a la relation :*

$$1 = \frac{\sin(\alpha_1, B)\sin(\alpha_2, B)\ldots\sin(\alpha_p, B)}{\sin(\alpha_1, C)\sin(\alpha_2, C)\ldots\sin(\alpha_p, C)}$$
$$\times \frac{\sin(\beta_1, C)\sin(\beta_2, C)\ldots\sin(\beta_p, C)}{\sin(\beta_1, A)\sin(\beta_2, A)\ldots\sin(\beta_p, A)}$$
$$\times \frac{\sin(\gamma_1, A)\sin(\gamma_2, A)\ldots\sin(\gamma_p, A)}{\sin(\gamma_1, C)\sin(\gamma_2, C)\ldots\sin(\gamma_p, C)}.$$

Ce théorème est dû à M. Chasles, qui l'a démontré, p. 360 de sa *Géométrie supérieure,* en faisant usage des coordonnées particulières.

Nous ne faisons que mentionner ce théorème, qui peut, comme celui de Carnot, être étendu à un polygone d'un nombre quelconque de sommets.

3. *Théorème relatif aux tangentes communes à plusieurs courbes.*

Lorsqu'un groupe de p^2 droites est composé de tangentes communes à deux courbes de la classe p, les droites de ce groupe ne sont pas toutes arbitraires.

Toute courbe de la classe p qui est tangente à $\frac{p^2+3p-2}{2}$ *de ces droites est nécessairement tangente aux* $\frac{p^2-3p+2}{2}$ *autres droites.*

De là ce théorème :

THÉORÈME LXXXII. — *Si pq tangentes communes à deux courbes de la classe p sont tangentes à une courbe de la classe q, les $p(p-q)$ autres tangentes communes aux deux courbes sont tangentes à une courbe du degré $(p-q)$.*

4. *Application de ce théorème.*

En particulier :

Si trois des neuf tangentes communes à deux courbes de troisième classe passent par un même point, les six autres touchent une conique.

Et, réciproquement :

Si six des neuf tangentes communes à deux courbes de troisième classe touchent une conique, les trois autres passent par un même point.

Étant donnés une conique et un hexagone circonscrit, un raisonnement analogue à celui que nous avons fait au n° 7 du chapitre précédent conduit à ce théorème :

THÉORÈME DE BRIANCHON.— *Lorsqu'un hexagone est circonscrit à une conique, ses trois diagonales passent par un même point.*

5. *Propriétés des sommets.*

Par un point A, extérieur à une courbe de la classe p, menons les tangentes à cette courbe, et sur chacune de ces droites prenons un point quelconque.

Ces points, au nombre de p, constitueront une courbe géométrique de la classe p. Cette ligne aura avec la courbe donnée p^2 tangentes communes; et comme p de ces tangentes passent par le point A, les $p(p-1)$ autres seront à une courbe de la classe $(p-1)$.

Donc :

THÉORÈME LXXXIII. — *Si sur chacune des tangentes à une courbe de la classe p, menées par un sommet* A, *on prend un point quelconque, les* $p(p-1)$ *tangentes (ne passant pas par* A, *) menées de ces points à la courbe donnée, toucheront une courbe de la classe* $(p-1)$.

En considérant deux sommets extérieurs A et B, on arriverait à ce nouveau théorème :

THÉORÈME LXXXIV.— *Étant données une courbe géométrique de la classe p, et les tangentes issues de deux points extérieurs* A *et* B, *si l'on prend un système de p points tels, que chacun d'entre eux soit l'intersection de deux tangentes prises dans chaque système et que deux d'entre eux ne soient pas en ligne droite avec l'un des deux sommets* A *et* B, *les* $p(p-2)$ *tangentes à la courbe, issues de ces différents points, toucheront une ligne de la classe* $p-2$.

Si l'on suppose que B tende vers A, on arrive à cette conséquence :

THÉORÈME LXXXV. — *Si, par les points de contact d'une courbe de la classe p, et des tangentes issues d'un même point extérieur, on mène toutes les tangentes possibles à cette courbe, ces droites toucheront une courbe de la classe* $(p-2)$.

Au lieu de deux transversales, on peut considérer une conique quelconque, et l'on arrive à ce théorème :

THÉORÈME LXXXVI. — *Étant données une courbe géométrique de la classe p et une conique située dans son plan, si l'on mène les 2p tangentes communes à ces deux courbes, et si, parmi les intersections mutuelles de ces tangentes, on prend un système de p points tels, que deux d'entre eux ne soient pas sur une même tangente à la conique, les $p(p-2)$ tangentes à la courbe (et ne touchant pas la conique) menées par ces divers points toucheront une courbe de la classe $(p-2)$.*

6. *Polygones circonscrits aux coniques.*

Si l'on se donne un polygone de $2p$ sommets circonscrit à une conique, les sommets peuvent être rangés en deux groupes G et H, tels, que chaque sommet pris dans l'un d'eux ait son opposé dans l'autre.

Chacun de ces groupes peut être regardé comme une courbe de la classe p. Les deux courbes ainsi définies ont les mêmes tangentes communes avec la conique, donc les $p(p-2)$ autres tangentes communes à ces courbes touchent une ligne de la classe $(p-2)$.

Par conséquent :

THÉORÈME LXXXVII. — *Lorsqu'un polygone d'un nombre de côtés pair est circonscrit à une conique, les diagonales de ce polygone sont tangentes à une courbe d'une classe égale à la moitié moins deux du nombre des côtés de ce polygone.*

C'est la généralisation du théorème de Brianchon. En supposant que le groupe de sommets H tende vers le groupe de sommets G, on arrive à ce nouveau théorème :

THÉORÈME LXXXVIII. — *Lorsqu'un polygone de p côtés est circonscrit à une conique, le système des droites qui vont des points de contact aux divers sommets du polygone, déduction faite de celles qui coïncident avec les côtés, touche une courbe de la $(p-2)^{\text{ième}}$ classe.*

Ces droites sont au nombre de $p(p-2)$.

LIVRE V.

CORRESPONDANCE ANHARMONIQUE. — DIVISIONS SEGMENTAIRES ET TANGENTIELLES. — HOMOGRAPHIE ET INVOLUTION.

CHAPITRE PREMIER.

CORRESPONDANCE ANHARMONIQUE DANS LES FAISCEAUX DE COURBES.

1. *Courbes pivotantes homographiques.*

Imaginons deux faisceaux pivotants respectivement définis par les équations cartésiennes

$$\varphi(x, y) + \mu\varphi_1(x, y) = 0,$$
$$\psi(x, y) + \nu\psi_1(x, y) = 0,$$

des degrés p et q. Si les paramètres μ et ν sont mutuellement liés de sorte qu'à une courbe du premier faisceau corresponde sans ambiguïté une courbe du second, et qu'à une courbe du second corresponde sans ambiguïté une courbe du premier, nous disons que les deux faisceaux sont *homographiques* ou en *correspondance anharmonique*.

Cette correspondance peut s'exprimer par l'équation, linéaire en μ et en ν,

$$a\mu\nu + b\mu + c\nu + d = 0$$

dans laquelle a, b, c, d sont des constantes.

2. *Courbes roulantes homographiques.*

On peut aussi concevoir des faisceaux roulants *homographiques*. Si

$$\varphi(x, y) + \mu\varphi_1(x, y) = 0,$$
$$\psi(x, y) + \nu\psi_1(x, y) = 0,$$

représentent les équations tangentielles des degrés p et q de deux faisceaux roulants, on exprimera la *correspondance anharmonique* de ces deux faisceaux en posant

$$a\mu\nu + b\mu + c\nu + d = 0.$$

Dans ce qui va suivre nous traiterons en même temps des courbes pivotantes et des courbes roulantes.

3. *Propriété générale.*

Il est évident que :

THÉORÈME LXXXIX. — *Deux faisceaux (pivotants ou roulants) homographiques à un troisième (pivotant ou roulant) sont homographiques entre eux.*

4. *Exemple de correspondance anharmonique* (*).

Pour donner un exemple de correspondance anharmonique, considérons un faisceau pivotant du degré p et un point arbitraire P du plan.

Les polaires cartésiennes, d'un même ordre $q < p$, de ce point, relativement aux diverses courbes du faisceau pivotant, forment elles-mêmes un faisceau pivotant. A une courbe du faisceau donné correspond une seule courbe du faisceau polaire, et réciproquement, à une courbe polaire correspond une seule courbe du faisceau donné. Donc :

THÉORÈME XC. — *Un faisceau pivotant du degré p et le faisceau pivotant du degré $(p - q)$ formé par les polaires carté-*

(*) Le principe de *correspondance anharmonique* est fondamental en *géométrie segmentaire*. Voir l'admirable *Géométrie supérieure* de M. Chasles.

siennes d'ordre q d'un même point du plan relativement aux courbes du premier faisceau, sont homographiques entre eux.

En considérant les courbes roulantes on arrive à un théorème analogue.

THÉORÈME XCI. — *Un faisceau roulant de la classe p, et le faisceau roulant de la classe $p-q$ formé par les pôles tangentiels d'ordre q d'une même droite du plan relativement aux courbes du premier faisceau, sont homographiques entre eux.*

5. *Lieux géométriques.*

Si entre les trois équations

$$\varphi(x, y) + \mu\varphi_1(x, y) = 0,$$
$$\psi(x, y) + \nu\psi_1(x, y) = 0,$$
$$a\mu\nu + b\mu + c\nu + d = 0,$$

on élimine les paramètres μ et ν, on arrive à l'équation

$$a\varphi\psi - b\varphi\psi_1 - c\varphi\psi_1 + d\varphi_1\psi_1 = 0,$$

laquelle est du degré $(p+q)$ et est d'ailleurs satisfaite par les solutions simultanées de l'un ou de l'autre des systèmes d'équations

$$\begin{cases} \varphi = 0, \\ \varphi_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \psi = 0, \\ \psi_1 = 0. \end{cases}$$

Suivant que l'on considère les équations ci-dessus comme cartésiennes, pour des faisceaux pivotants, ou comme tangentielles, pour des faisceaux roulants, on arrive à l'un ou à l'autre de ces théorèmes :

THÉORÈME XCII. — *Quand deux faisceaux pivotants sont homographiques, les courbes homologues se coupent sur une courbe géométrique d'un degré égal à la somme des degrés des deux faisceaux et passant par tous les* pivots.

THÉORÈME XCIII. — *Quand deux faisceaux roulants sont homographiques, les tangentes communes aux courbes homologues roulent sur une courbe géométrique d'une classe égale à la somme des classes des deux faisceaux et tangente à tous les* axes de roulement.

6. *Conditions pour établir la liaison anharmonique de deux faisceaux.*

Sur ces théorèmes repose une méthode de construction des courbes dont nous parlerons dans un chapitre spécial. Si l'on prend arbitrairement trois courbes du premier faisceau et si l'on prend aussi arbitrairement trois courbes du deuxième faisceau destinées à correspondre respectivement aux premières, on définit la liaison anharmonique des deux faisceaux.

En effet, soient

$$\begin{cases} \varphi(x, y) + k_1\varphi_1(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) + k_2\varphi_1(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) + k_3\varphi_1(x, y) = 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \psi(x, y) + h_1\psi_1(x, y) = 0, \\ \psi(x, y) + h_2\psi_1(x, y) = 0, \\ \psi(x, y) + h_3\psi_1(x, y) = 0, \end{cases}$$

les deux systèmes de courbes arbitraires correspondantes.

L'équation en μ et ν devra être satisfaite par les trois systèmes de valeurs

$$\begin{cases} \mu = k_1, \\ \nu = h_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \mu = k_2, \\ \nu = h_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \mu = k_3, \\ \nu = h_3. \end{cases}$$

Or ces conditions sont suffisantes, sans être surabondantes, pour déterminer les trois paramètres $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{c}{d}$ que contient en réalité l'équation en μ et ν.

7. *Propriété perspective.*

Nous terminerons ce chapitre en énonçant la propriété suivante, laquelle résulte clairement de ce qui précède :

THÉORÈME XCIV. — *Un faisceau, pivotant ou roulant, et tout faisceau, pivotant ou roulant, obtenu au moyen d'une perspective du premier, sont homographiques entre eux.*

CHAPITRE II.

HOMOGRAPHIE SUR LES DROITES ET AUTOUR DES POINTS.

1. *Groupes de points en ligne droite et groupes de droites convergentes.*

On peut supposer qu'un faisceau roulant de la classe p se réduise à un groupe de p points en ligne droite mobiles sur un axe fixe; et, analoguement, qu'un faisceau pivotant du degré p se réduise à un groupe de p droites convergentes mobiles autour d'un sommet fixe.

La première de ces hypothèses conduit à la notion de la *division segmentaire* sur une droite par groupes de p points; la seconde conduit à la notion de la *division tangentielle* autour d'un point par groupes de p droites.

Sous ces points de vue, la *division segmentaire* se rattache à la géométrie tangentielle et la *division tangentielle* à la géométrie cartésienne.

Or, il y a intérêt à présenter ces questions sous des faces inverses, c'est-à-dire à rattacher la division segmentaire à la géométrie cartésienne et la division tangentielle à la géométrie tangentielle. Nous appellerons division segmentaire ou tangentielle du degré p sur une droite autour d'un point, *une division formée par des groupes mobiles de p éléments tels, qu'un élément quelconque d'un groupe détermine tous ceux de ce groupe.*

2. *Équation aux groupes mobiles de p éléments.*

Si l'on désigne par x la distance affectée de signe d'un point quelconque de l'axe aux groupes segmentaires à une origine fixe, ou bien la tangente de l'angle, compté dans un sens de rotation fixe, d'une droite quelconque, passant par le sommet

aux groupes tangentiels, avec un axe-origine fixe, une fonction symétrique λ des x d'un même groupe (leur somme, par exemple) sera nécessairement liée à ces x eux-mêmes par une équation algébrique entière du degré p en x et du premier degré en α.

La forme générale de cette équation est

$$\varphi(x) + \lambda\psi(x) = 0,$$

φ et ψ désignant des polynômes du degré p.

Si dans cette équation on regarde λ comme une constante arbitraire, on a l'équation générale des différents groupes de la division exprimée au moyen des équations particulières

$$\varphi(x) = 0$$

et

$$\psi(x) = 0$$

de deux de ces groupes.

Cette forme peut être simplifiée si l'on remplace le groupe

$$\psi(x) = 0$$

par celui qui contient une valeur infinie de x.

En effet, on a

$$\psi(x) = A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots,$$
$$\varphi(x) = B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \ldots$$

et par conséquent

$$\psi(x) - \frac{A_0}{B_0}\varphi(x) = \varphi_1(x),$$

φ_1 désignant un polynôme du degré $(p-1)$ seulement.

D'après cela, si l'on change de paramètre arbitraire en posant

$$\frac{1}{\lambda} = \mu - \frac{A_0}{B_0},$$

l'équation aux groupes prendra la forme

$$\varphi_1(x) + \mu\varphi(x) = 0,$$

φ_1 et φ étant des polynômes des degrés $(p-1)$ et p.

L'équation

$$\varphi_1(x) = 0$$

représente les valeurs de x qui sont compagnes de la valeur infinie de cette variable dans un même groupe.

3. *Divisions homographiques des degrés p, q.*

Considérons maintenant deux divisions, segmentaires ou tangentielles, par groupes de p et de q éléments, établies soit sur une même droite ou sur deux droites différentes, soit autour d'un même point ou autour de deux points différents. Ces deux divisions seront définies par les équations générales

$$\begin{cases} \psi(x) + \lambda\varphi(x) = 0, \\ \chi(\alpha) + \sigma\theta(\alpha) = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles ψ et φ sont des polynômes du degré p, χ et θ sont des polynômes du degré q, λ et σ des paramètres arbitraires.

Nous pouvons établir la correspondance anharmonique entre les groupes des deux systèmes, en posant

$$a\lambda\sigma + b\lambda + c\sigma + d = 0,$$

et nous aurons alors deux *divisions homographiques*, des degrés p et q.

Si l'on élimine λ et σ entre les trois équations ci-dessus, la correspondance des x et des α s'exprimera directement par l'équation résultante à deux variables

$$a\psi(x)\chi(\alpha) - b\psi(x)\theta(\alpha) - c\chi(\alpha)\varphi(x) + \varphi(x)\theta(\alpha) = 0,$$

laquelle est du degré p en x et du degré q en a.

4. *Équation anharmonique des degrés p et q.*

Nous donnerons à cette équation le nom d'*équation anharmonique*, des degrés p, q, entre les variables x et α.

Considérée au point de vue purement algébrique, elle ex-

prime une relation entre x et α, laquelle jouit des propriétés suivantes :

A une valeur de x correspondent q valeurs déterminées de α, à chacune desquelles correspond un même système de p valeurs de x, comprenant la valeur d'où l'on est parti.

Réciproquement :

A une valeur de α correspondent p valeurs déterminées de x, à chacune desquelles correspond un même système de valeurs de α, comprenant la valeur d'où l'on est parti.

On peut d'ailleurs démontrer que si les x et les α ont entre eux une correspondance qui jouisse des propriétés précédentes, ces variables satisfont à une équation de la forme indiquée plus haut.

En effet, un groupe de q valeurs de α se trouve correspondre, sans ambiguïté, à une fonction symétrique quelconque des p valeurs composantes du groupe en x correspondant, par exemple, à la somme σ de ces valeurs, laquelle correspond elle-même, sans ambiguïté, à ces groupes de q valeurs de α. Donc, α et σ sont liés entre eux par une équation algébrique du degré q en α et linéaire en σ dont la forme générale est

$$\chi(\alpha) + \sigma\theta(\alpha) = 0,$$

χ et θ étant des polynômes du degré q.

On verra de même que les x et les sommes λ des valeurs composantes des groupes en α sont nécessairement liés entre eux par une équation dont la forme générale est

$$\psi(x) + \lambda\varphi(x) = 0,$$

ψ et φ étant des polynômes du degré p.

D'autre part, σ et λ ont une liaison telle, qu'à une valeur de σ correspond une seule valeur de λ et qu'à une valeur de λ correspond une seule valeur de σ; d'où il résulte que ces variables sont liées entre elles par une équation de la forme

$$a\lambda\sigma + b\lambda + c\sigma + d = 0,$$

a, b, c, d étant des constantes.

La relation entre les x et les α résulte de l'élimination de λ

et de σ entre les trois équations ci-dessus; elle est donc nécessairement de la forme indiquée à la fin du numéro précédent.

5. *Conditions pour déterminer l'équation anharmonique.*

L'équation en λ et σ, contenant trois paramètres arbitraires, est déterminée si l'on prend *à priori* trois valeurs de λ et les trois valeurs de σ correspondantes.

D'ailleurs l'équation

$$\psi(x) + \lambda\varphi(x) = 0$$

contenant $(2p+1)$ paramètres arbitraires, on voit que pour déterminer trois valeurs de λ il est nécessaire et suffisant de se donner *à priori* deux groupes arbitraires de q valeurs de x et un point arbitraire d'un troisième groupe.

De même, pour déterminer trois valeurs de σ, il est nécessaire et suffisant de se donner *à priori* deux groupes arbitraires de q valeurs de α et un point arbitraire d'un troisième groupe.

D'où il résulte que *pour déterminer une équation anharmonique des degrés p, q il est nécessaire et suffisant de prendre* à priori *deux systèmes de groupes de valeurs correspondantes de x et de α, et deux points d'un troisième système de groupes de valeurs correspondantes des mêmes variables.*

6. *Forme simplifiée de l'équation anharmonique.*

D'après cela, désignons par

$$\varphi_1(x) = 0$$

l'équation du degré $(p-1)$ qui représente le groupe des x qui contient une valeur infinie (ce groupe existe nécessairement puisque x peut prendre toutes les valeurs possibles), et par

$$\psi_1(\alpha) = 0$$

l'équation du degré $(q-1)$ qui représente le groupe des α qui contient une valeur infinie.

Soient, en outre,

$$\psi(\alpha) = 0$$

et

$$\varphi(x) = 0$$

les équations des degrés q et p qui représenteront les groupes correspondants à ceux qui viennent d'être définis.

L'équation anharmonique pourra s'exprimer à l'aide de quatre fonctions φ, φ_1, ψ et ψ_1 et d'un seul paramètre arbitraire.

L'équation aux x peut d'abord être mise sous la forme

$$\varphi_1(x) + \lambda\varphi(x) = 0,$$

λ désignant la somme variable des valeurs composantes des groupes en α.

De même, l'équation aux α peut être mise sous la forme

$$\psi_1(\alpha) + \sigma\psi(\alpha) = 0,$$

σ désignant la somme variable des valeurs composantes des groupes en x.

La relation entre λ et σ est de la forme générale

$$a\lambda\sigma + b\lambda + c\sigma + d = 0.$$

Or, de la nature des quatre fonctions φ, φ_1, ψ, ψ_1, il résulte que cette équation doit admettre les systèmes de solutions

$$\begin{cases} \lambda = 0, \\ \sigma = \infty, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma = 0, \\ \lambda = \infty; \end{cases}$$

on a donc

$$b = 0,$$
$$c = 0,$$

et la relation entre λ et σ se réduit à la forme

$$\lambda\sigma = \text{const.}$$

Par conséquent l'équation anharmonique se réduit à

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)} \times \frac{\psi_1(\alpha)}{\psi(\alpha)} = k,$$

k désignant une quantité constante.

On peut disposer de cette constante de manière à rendre correspondantes deux valeurs quelconques de x et de α non comprises dans les groupes auxquels se rapportent les fonctions φ, φ_1, ψ et ψ_1.

7. *Conditions pour qu'une équation des degrés p et q en x et α soit anharmonique.*

Cette forme simplifiée de l'équation anharmonique des degrés p et q en x et α montre que cette équation contient $[2(p+q)-1]$ paramètres arbitraires, d'où il résulte que *pour déterminer l'équation anharmonique des degrés p et q, il est nécessaire et suffisant de faire connaître* $(2p+2q-1)$ *couples de valeurs homologues de x et de α.*

L'équation générale des degrés p et q en x et α contient $(p+1)(q+1)$ termes, et par conséquent $(pq+p+q)$ paramètres arbitraires.

On a

$$(pq+p+q)-(2p+2q-1)=pq-(p+q)+1.$$

Donc :

Une équation des degrés p, q à deux variables ne peut être anharmonique qu'autant que les coefficients de ses termes satisfont à $pq-p-q+1$ *équations de condition.*

En particulier, pour qu'une équation des degrés (2, 2) soit anharmonique, il faut et il suffit que ses neuf coefficients satisfassent à une équation de condition, laquelle consiste, ainsi que M. Chasles l'a indiqué, en ce que le déterminant des neuf coefficients doit être nul (*).

Il serait sans doute intéressant de rechercher quelles sont, dans le cas général, les équations de condition dont nous n'avons déterminé que le nombre; mais cette étude purement algébrique ne peut être essayée dans cet ouvrage.

8. *Propriété générale.*

La définition même de la correspondance anharmonique conduit *à priori* à cette propriété générale.

(*) Mémoire sur la construction des racines des équations du troisième et du quatrième degré (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, second semestre 1855).

THÉORÈME XCV. — *Deux divisions (segmentaires ou tangentielles) homographiques à une troisième (segmentaire ou tangentielle) sont homographiques entre elles.*

9. *Divisions sur une même droite ou autour d'un même point. — Éléments doubles.*

Si l'on suppose que deux divisions homographiques des degrés p, q, segmentaires ou tangentielles, soient établies sur une même droite ou autour d'un même point, il y a lieu de considérer des *éléments doubles* (points ou droites) dont chacun jouit de la propriété d'appartenir en même temps à deux groupes homologues.

Si les x et les α sont comptés à partir d'une même origine, les coordonnées z des éléments doubles sont évidemment déterminées par l'équation du degré $(p+q)$

$$\frac{\varphi_1(z)}{\varphi(z)} \times \frac{\psi_1(z)}{\psi(z)} = k.$$

On peut déterminer une homographie des degrés (p, q) en donnant les $(p+q)$ éléments doubles et $(p+q-1)$ couples d'éléments correspondants.

10. *Divisions sur des droites différentes ou autour de points différents. — Lieux géométriques.*

Lorsque deux divisions homographiques des degrés p, q sont établies sur deux droites différentes, les deux groupes de points mobiles peuvent être assimilés à deux courbes roulantes dont les tangentes communes sont les droites qui joignent les points des deux groupes ; donc :

THÉORÈME XCVI. — *Les droites qui joignent les points des groupes homologues de deux divisions homographiques des degrés p, q enveloppent une courbe géométrique tangente p fois et q fois à l'un et à l'autre des axes des deux divisions.*

De même, lorsque deux divisions homographiques des degrés p, q sont établies autour de points différents, les deux

groupes de droites mobiles peuvent être assimilés à deux courbes pivotantes. Donc :

THÉORÈME XCVII. — *Les points d'intersection des groupes droites homologues de deux divisions homographiques des degrés p, q engendrent une courbe géométrique passant p fois et q fois par l'un et par l'autre des sommets des deux divisions.*

Les axes, dans le cas des divisions segmentaires, et les sommets, dans le cas des divisions tangentielles, jouent les rôles de *tangentes singulières* et de *points singuliers*, relativement aux lieux géométriques qui viennent d'être définis.

CHAPITRE III.

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES DIVISIONS SEGMENTAIRES ET TANGENTIELLES.

§ I. — Division sur une droite par groupes de points.

1. *Relation géométrique entre les points d'un même groupe.*

L'équation qui exprime la division sur une droite par groupe de p points est, comme nous l'avons vu précédemment,

$$\psi(x) + \lambda\varphi(x) = 0,$$

λ désignant un paramètre arbitraire.

Les équations

$$\psi(x) = 0$$

et

$$\varphi(x) = 0$$

représentent deux groupes de points particuliers

$$m_1, \quad m_2, \ldots, \quad m_p$$

et

$$n_1, \quad n_2, \ldots, \quad n_p,$$

dont la connaissance suffit pour déterminer la division tout entière.

Considérons un troisième groupe quelconque et désignons par m l'un quelconque des points qui le composent.

L'équation

$$\psi(x) + \lambda\varphi(x) = 0$$

exprime que l'on a, pour les points m d'un même groupe, la relation géométrique

$$\frac{mm_1 \times mm_2 \times mm_p}{mn_1 \times mn_2 \times mn_p} = \text{const.}$$

Si donc nous appelons *distance segmentaire* d'un point à un groupe le produit des distances de ce point aux divers points de ce groupe, nous pourrons dire que :

THÉORÈME XCVIII. — *Dans une division segmentaire, les points d'un même groupe sont tels, que leurs distances segmentaires à deux groupes arbitraires, mais fixes, de la division, sont dans une raison constante.*

2. *Deux groupes distincts n'ont pas de points communs.*

Considérons deux groupes quelconques déterminés par les équations

$$\psi(x) + h\varphi(x) = 0,$$
$$\psi(x) + k\varphi(x) = 0.$$

Si ces deux groupes avaient un point commun, correspondant à $x = x_1$, on aurait nécessairement

$$\psi(x_1) = 0,$$
$$\varphi(x_1) = 0,$$

et par conséquent

$$\psi(x_1) + \lambda\varphi(x_1) = 0,$$

quel que soit λ. Il en résulte que le point x_1 appartiendrait à tous les groupes.

Le degré de l'équation aux divisions pourrait alors être abaissé d'une unité, et l'on aurait

$$\frac{\psi(x)}{x - x_1} + \lambda \frac{\varphi(x)}{x - x_1} = 0$$

pour exprimer une division du degré $(p - 1)$ résultant de la première, dépouillée du point commun à tous les groupes.

En un mot, la division serait *réductible* à une de degré moindre.

Si l'on suppose qu'on ait affaire à une division irréductible, on peut dire que *deux groupes distincts n'ont pas de points communs.*

3. *Propriété du point à l'infini.*

Le point à l'infini de la droite fait partie d'un groupe dont les autres points peuvent être déterminés par l'équation du degré $(p-1)$

$$\psi_1(x) = 0.$$

Nous désignerons par I le groupe de ces points.

L'équation de la division peut alors être mise sous la forme

$$\psi_1(x) + \lambda\varphi(x) = 0,$$

et un raisonnement analogue à celui qui a été fait au n° 1 conduit à cette conséquence que :

Les points d'un même groupe sont tels, que leurs distances segmentaires au groupe I *et à un groupe quelconque, mais fixe, sont dans une raison constante.*

Ce qui revient à dire qu'on peut faire abstraction du point à l'infini dans le groupe qui le contient.

4. *Polygones directeurs.*

En faisant usage du groupe $\psi(x) = 0$ et d'un autre groupe quelconque de la division, lequel est défini par les abscisses x_1, $x_2, \ldots, x_p$, l'équation de la division peut s'écrire

$$\frac{\psi(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_p)} = \lambda,$$

ou bien, en vertu d'une formule d'algèbre,

$$\frac{\psi(x_1)}{(x-x_1)\varphi'(x_1)} + \frac{\psi(x_2)}{(x-x_2)\varphi'(x_2)} + \ldots + \frac{\psi(x_p)}{(x-x_p)\varphi'(x_p)} = \lambda.$$

Cette équation peut donc être mise sous la forme

$$\frac{y_1}{x-x_1} + \frac{y_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{y_p}{x-x_p} = \mu,$$

y_1, $y_2, \ldots, y_p$ désignant des constantes auxquelles on peut supposer des valeurs absolues plus grandes que l'unité.

Cela posé, prenons sur l'axe de la division les points

$$M_1, \quad M_2, \ldots, \quad M_p,$$

dont les abscisses sont

$$x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_p,$$

et menons par ces points les droites $X_1, X_2, \ldots, X_p$, telles, que les sinus des angles que font leurs directions supérieures avec la partie positive de l'axe de la division soient respectivement égaux à

$$\frac{1}{y_1}, \quad \frac{1}{y_2}, \ldots, \quad \frac{1}{y_p},$$

les distances

$$d_1, \quad d_2, \ldots, \quad d_p$$

d'un point quelconque de l'axe à ces diverses droites s'exprimeront au moyen de l'abscisse x de ce point, par les formules

$$d_1 = \frac{x - x_1}{y_1}, \quad d_2 = \frac{x - x_2}{y_2}, \ldots, \quad d_p = \frac{x - x_p}{y_p}.$$

En sorte qu'on aura pour tous les points d'un même groupe

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_p} = \mu,$$

ou bien, en désignant par D la *moyenne harmonique* des quantités $d_1, d_2, \ldots, d_p$,

$$D = \frac{\mu}{p}.$$

Nous appellerons *polygone directeur* de la division le groupe des droites $X_1, X_2, \ldots, X_p$, et nous pourrons dire en vertu de la formule précédente que :

THÉORÈME XCIX. — *Dans une division segmentaire, les points d'un même groupe sont tels, que la moyenne harmonique des distances de l'un quelconque d'entre eux aux côtés d'un polygone directeur a une valeur constante, quel que soit ce point du groupe.*

Un groupe quelconque de la division détermine une infinité de polygones directeurs dont les côtés passent par les points de ce groupe.

5. *Courbes harmoniques relatives à un groupe de droites.*

Nous appellerons *courbe harmonique* relative à un groupe de droites, un lieu géométrique tel, que la moyenne harmonique des distances d'un point quelconque de cette courbe aux divers côtés du polygone ait une valeur constante.

Si l'on représente le groupe de p droites par l'équation cartésienne, prise en coordonnées rectangulaires,

$$P = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2)(a_px + b_py + c_p) = 0,$$

l'équation de la courbe harmonique correspondant à la valeur $\frac{\lambda}{p}$ de la constante sera

$$\frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}{a_1x + b_1y + c_1} + \frac{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}{a_2x + b_2y + c_2} + \ldots + \frac{\sqrt{a_p^2 + b_p^2 + c_p^2}}{a_px + b_py + c_p} = \lambda,$$

et si l'on ramène cette équation à la forme entière, on trouvera

$$\lambda P - \sum_1^p \frac{P\sqrt{a_s^2 + b_s^2 + c_s^2}}{a_sx + b_sy + c_s} = 0.$$

On voit ainsi que :

Toute courbe harmonique relative à un groupe de p droites est du degré p et passe par tous les sommets du polygone.

De plus, les termes du degré p dans l'équation d'une courbe harmonique sont proportionnels aux termes du même degré dans l'équation même du polygone; donc :

Toute courbe harmonique passe par les points à l'infini des côtés du polygone.

Lorsqu'on fait varier λ, on forme la série des courbes harmoniques relatives au polygone. Il résulte de ce qui précède que :

Chaque côté du polygone est une corde commune à toutes les courbes harmoniques;

Les points d'intersection sont le point à l'infini de ce côté et ses intersections avec les autres côtés du polygone.

Les courbes harmoniques relatives à un polygone forment un faisceau pivotant du degré p. Les pivots, au nombre de p^2, se composent des p points à l'infini des côtés du polygone et de $p(p-1)$ points, communs aux deux courbes

$$P = 0,$$

$$\sum_1^p \frac{P\sqrt{a_s^2 + b_s^2 + c_s^2}}{a_s x + b_s y + c_s} = 0.$$

Or, ces deux courbes, dont la première est le polygone lui-même, ne peuvent avoir en commun que les sommets mêmes de ce polygone au nombre de $\frac{p(p-1)}{2}$. Donc chacun de ces sommets doit figurer doublement parmi les pivots, c'est-à-dire que les courbes harmoniques ont une tangente commune en chaque sommet du polygone.

En résumé :

Théorème C. — *Les courbes harmoniques relatives à un groupe de p droites forment un faisceau pivotant.*

Les pivots, au nombre de p^2, se composent :

1° *Des p points à l'infini des divers côtés du polygone ;*

2° *Des $\frac{p(p-1)}{2}$ sommets du polygone ;*

3° *De $\frac{p(p-1)}{2}$ points infiniment voisins des sommets et situés sur les directions de tangentes communes aux diverses courbes du faisceau.*

6. *Nouvelle définition des divisions par groupes de points.*

Ce qui précède conduit à cette définition nouvelle et purement géométrique d'une division par groupes de p points.

Théorème CI. — *Les divers groupes d'une division faite sur une droite sont déterminés par les intersections de cette droite avec le faisceau pivotant des courbes harmoniques relatives à un polygone directeur quelconque.*

5. *Courbes harmoniques relatives à un groupe de droites.*

Nous appellerons *courbe harmonique* relative à un groupe de droites, un lieu géométrique tel, que la moyenne harmonique des distances d'un point quelconque de cette courbe aux divers côtés du polygone ait une valeur constante.

Si l'on représente le groupe de p droites par l'équation cartésienne, prise en coordonnées rectangulaires,

$$P = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2)(a_px + b_py + c_p) = 0,$$

l'équation de la courbe harmonique correspondant à la valeur $\frac{\lambda}{p}$ de la constante sera

$$\frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}{a_1x + b_1y + c_1} + \frac{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}{a_2x + b_2y + c_2} + \ldots + \frac{\sqrt{a_p^2 + b_p^2 + c_p^2}}{a_px + b_py + c_p} = \lambda,$$

et si l'on ramène cette équation à la forme entière, on trouvera

$$\lambda P - \sum_1^p \frac{P\sqrt{a_s^2 + b_s^2 + c_s^2}}{a_sx + b_sy + c_s} = 0.$$

On voit ainsi que :

Toute courbe harmonique relative à un groupe de p droites est du degré p et passe par tous les sommets du polygone.

De plus, les termes du degré p dans l'équation d'une courbe harmonique sont proportionnels aux termes du même degré dans l'équation même du polygone; donc :

Toute courbe harmonique passe par les points à l'infini des côtés du polygone.

Lorsqu'on fait varier λ, on forme la série des courbes harmoniques relatives au polygone. Il résulte de ce qui précède que :

Chaque côté du polygone est une corde commun[illegible] les courbes harmoniques;

Les points d'intersection [illegible] point à l'in[illegible] et ses intersections avec [illegible] côtés du [illegible]

Les courbes harmoniques relatives à un polygone forment un faisceau pivotant du degré p. Les pivots, au nombre de p^2, se composent des p points à l'infini des côtés du polygone et de $p(p-1)$ points, communs aux deux courbes

$$P = 0,$$

$$\sum_1^p \frac{P\sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2}}{a_i x + b_i y + c_i} = 0.$$

Or, ces deux courbes, dont la première est le polygone lui-même, ne peuvent avoir en commun que les sommets mêmes de ce polygone au nombre de $\frac{p(p-1)}{2}$. Donc chacun de ces sommets doit figurer doublement parmi les pivots, c'est-à-dire que les courbes harmoniques ont une tangente commune en chaque sommet du polygone.

En résumé :

Théorème C. — *Les courbes harmoniques relatives à un groupe de p droites forment un faisceau pivotant.*

Les pivots, au nombre de p^2, se composent :

1° *Des p points à l'infini des divers côtés du polygone ;*

2° *Des $\frac{p(p-1)}{2}$ sommets du polygone ;*

3° *De $\frac{p(p-1)}{2}$ points infiniment voisins des sommets et situés sur les directions de tangentes communes aux diverses courbes du faisceau.*

6. *Nouvelle définition des divisions par groupes de points.*

Ce qui précède conduit à cette définition nouvelle et purement géométrique d'une division par groupes de p points.

Th[illegible] CI. — *Les divers groupes d'une division faite sur* [illegible] *ont déterminés par les intersections de cette* [illegible] *faisceau pivotant des courbes harmoniques rela-* [illegible] *rgone directeur quelconque.*

5. *Courbes harmoniques relatives à un groupe de droites.*

Nous appellerons *courbe harmonique* relative à un groupe de droites, un lieu géométrique tel, que la moyenne harmonique des distances d'un point quelconque de cette courbe aux divers côtés du polygone ait une valeur constante.

Si l'on représente le groupe de p droites par l'équation cartésienne, prise en coordonnées rectangulaires,

$$P = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2)(a_px + b_py + c_p) = 0,$$

l'équation de la courbe harmonique correspondant à la valeur $\frac{\lambda}{p}$ de la constante sera

$$\frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}{a_1x + b_1y + c_1} + \frac{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}{a_2x + b_2y + c_2} + \ldots + \frac{\sqrt{a_p^2 + b_p^2 + c_p^2}}{a_px + b_py + c_p} = \lambda,$$

et si l'on ramène cette équation à la forme entière, on trouvera

$$\lambda P - \sum_1^p \frac{P\sqrt{a_s^2 + b_s^2 + c_s^2}}{a_sx + b_sy + c_s} = 0.$$

On voit ainsi que :

Toute courbe harmonique relative à un groupe de p droites est du degré p et passe par tous les sommets du polygone.

De plus, les termes du degré p dans l'équation d'une courbe harmonique sont proportionnels aux termes du même degré dans l'équation même du polygone; donc :

Toute courbe harmonique passe par les points à l'infini des côtés du polygone.

Lorsqu'on fait varier λ, on forme la série des courbes harmoniques relatives au polygone. Il résulte de ce qui précède que :

Chaque côté du polygone est une corde commune à toutes les courbes harmoniques;

Les points d'intersection sont le point à l'infini de ce côté et ses intersections avec les autres côtés du polygone.

Les courbes harmoniques relatives à un polygone forment un faisceau pivotant du degré p. Les pivots, au nombre de p^2, se composent des p points à l'infini des côtés du polygone et de $p(p-1)$ points, communs aux deux courbes

$$P = 0,$$

$$\sum_1^p \frac{P\sqrt{a_s^2 + b_s^2 + c_s^2}}{a_s x + b_s y + c_s} = 0.$$

Or, ces deux courbes, dont la première est le polygone lui-même, ne peuvent avoir en commun que les sommets mêmes de ce polygone au nombre de $\frac{p(p-1)}{2}$. Donc chacun de ces sommets doit figurer doublement parmi les pivots, c'est-à-dire que les courbes harmoniques ont une tangente commune en chaque sommet du polygone.

En résumé :

Théorème C. — *Les courbes harmoniques relatives à un groupe de p droites forment un faisceau pivotant.*

Les pivots, au nombre de p^2, se composent :

1° *Des p points à l'infini des divers côtés du polygone ;*

2° *Des $\frac{p(p-1)}{2}$ sommets du polygone ;*

3° *De $\frac{p(p-1)}{2}$ points infiniment voisins des sommets et situés sur les directions de tangentes communes aux diverses courbes du faisceau.*

6. *Nouvelle définition des divisions par groupes de points.*

Ce qui précède conduit à cette définition nouvelle et purement géométrique d'une division par groupes de p points.

Théorème CI. — *Les divers groupes d'une division faite sur une droite sont déterminés par les intersections de cette droite avec le faisceau pivotant des courbes harmoniques relatives à un polygone directeur quelconque.*

7. *Points multiples.*

Lorsque deux ou plusieurs points d'un même groupe viennent à coïncider, nous donnerons le nom de *point multiple* à leur point de réunion.

Dans une division du degré p il y a généralement des points tels, qu'en l'un d'eux se superposent deux points d'un groupe ; ce sont des points multiples au premier degré.

Les points d'un degré de multiplicité plus élevé ne se présentent qu'exceptionnellement; nous ne parlerons que des précédents.

La détermination de ces points résulte évidemment de l'élimination de λ entre les deux équations simultanées

$$\psi(x) + \lambda\varphi(x) = 0$$

et

$$\psi'(x) + \lambda\varphi'(x) = 0,$$

laquelle conduit à l'équation algébrique

$$\psi(x)\varphi'(x) = \psi'(x)\varphi(x),$$

du degré $2(p-1)$.

Cette équation montre qu'*une division du degré p présente, en général,* $2(p-1)$ *points multiples.*

Chacun de ces points est tel, que si l'on prend deux groupes quelconques de la division et leurs groupes de points centraux respectifs, la distance segmentaire du point multiple au premier groupe, multipliée par le produit des distances de ce point aux points centraux du deuxième groupe, est égale à la distance segmentaire du même point au deuxième groupe multipliée par le produit des distances de ce point aux points centraux du premier groupe.

§ II. — Division autour d'un point par groupes de droites.

8. *Relation géométrique entre les rayons d'un même groupe.*

Soit x la tangente de l'angle formé par une droite quelconque passant par le sommet de la division avec un axe origine, angle

compté dans un sens de rotation déterminé; l'équation aux groupes de p éléments sera de la forme

$$\psi(x) + \lambda\varphi(x) = 0.$$

Désignons par o l'axe origine; par

$$M_1, \quad M_2, \ldots, \quad M_p$$

et

$$N_1, \quad N_2, \ldots, \quad N_p$$

les groupes de droites correspondant aux deux équations particulières

$$\psi(x) = 0$$

et

$$\varphi(x) = 0,$$

et par M une droite quelconque d'un troisième groupe, l'équation aux groupes se traduira par la formule géométrique

$$\frac{(\operatorname{tang}\widehat{o, M} - \operatorname{tang}\widehat{o, M_1})(\operatorname{tang}\widehat{o, M} - \operatorname{tang}\widehat{o, M_2})\ldots(\operatorname{tang}\widehat{o, M} - \operatorname{tang}\widehat{o, M_p})}{(\operatorname{tang}\widehat{o, M} - \operatorname{tang}\widehat{o, N_1})(\operatorname{tang}\widehat{o, M} - \operatorname{tang}\widehat{o, N_2})\ldots(\operatorname{tang}\widehat{o, M} - \operatorname{tang}\widehat{o, N_p})} = -\lambda;$$

et si l'on observe qu'en général

$$\operatorname{tang}\widehat{o, M} - \operatorname{tang}\widehat{o, P} = \frac{\sin\widehat{P, M}}{\cos\widehat{o, M}\cos\widehat{o, P}},$$

on pourra écrire

$$\frac{\sin\widehat{M, M_1} \times \sin\widehat{M, M_2} \times \ldots \times \sin\widehat{M, M_p}}{\sin\widehat{M, N_1} \times \sin\widehat{M, N_2} \times \ldots \times \sin\widehat{M, N_p}} = \text{const.},$$

équation indépendante de l'axe origine.

Si donc nous appelons *distance tangentielle* d'un rayon à un groupe le produit des sinus des angles formés par ce rayon avec les diverses droites du groupe, nous pourrons dire que :

THÉORÈME CII. — *Dans une division tangentielle, les rayons d'un même groupe sont tels, que leurs distances tangentielles à deux groupes arbitraires, mais fixes, de la division, sont dans une raison constante.*

9. *Deux groupes distincts n'ont pas de rayons communs.*

Un raisonnement analogue à celui que nous avons employé au n° 2 montre que si la division est *irréductible, deux groupes distincts ne peuvent pas avoir de rayons communs.*

10. *Rayons multiples.*

Lorsque deux ou plusieurs rayons d'un même groupe viennent à coïncider, on obtient un rayon *multiple.*

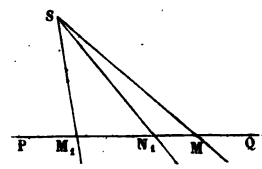
Dans une division tangentielle du degré p il y a généralement des rayons multiples au premier degré, au nombre de $(2p-1)$, déterminés par la relation

$$\psi(x)\,\varphi'(x) = \psi'(x)\,\varphi(x).$$

11. *Relation entre les divisions tangentielles et les divisions segmentaires.*

Considérons une division tangentielle du degré p.

S étant le sommet du faisceau, menons les droites SM_1,



$SM_2, \ldots, SM_p$, qui correspondent à un premier groupe, et les droites SN_1, $SN_2, \ldots, SN_p$, qui correspondent à un second groupe.

Soit d'ailleurs SM une droite quelconque.

Nous aurons pour toutes les droites d'un même groupe

$$\frac{\sin MSM_1 \times \sin MSM_2 \times \ldots \times \sin MSM_p}{\sin MSN_1 \times \sin MSN_2 \times \ldots \times \sin MSN_p} = \lambda.$$

Menons une transversale arbitraire PQ et marquons ses intersections avec les droites dont nous venons de parler, nous

aurons

$$\frac{MM_1}{SM_1}=\frac{\sin MSM_1}{\sin SM_1Q},\quad \frac{MM_2}{SM_2}=\frac{\sin MSM_2}{\sin SM_2Q},\ldots,\quad \frac{MM_p}{SM_p}=\frac{\sin MSM_p}{\sin SM_pQ},$$

$$\frac{MN_1}{SN_1}=\frac{\sin MSN_1}{\sin SN_1Q},\quad \frac{MN_2}{SN_2}=\frac{\sin MSN_2}{\sin SN_2Q},\ldots,\quad \frac{MN_p}{SN_p}=\frac{\sin MSN_p}{\sin SN_pQ},$$

et par suite

$$\frac{MM_1\times MM_2\times\ldots\times MM_p}{MN_1\times MN_2\times\ldots\times MN_p}=\text{const.}$$

pour tous les points M qui correspondent aux rayons SM d'un même groupe.

Par conséquent :

THÉORÈME CIII. — *Si l'on coupe par une transversale les groupes de rayons d'une division tangentielle, on détermine sur cette droite une division segmentaire.*

Et réciproquement :

THÉORÈME CIV. — *Si l'on joint à un sommet fixe les divers groupes de points d'une division segmentaire, on détermine autour de ce sommet une division tangentielle.*

§ III. — NOUVELLES PROPRIÉTÉS DES FAISCEAUX PIVOTANTS ET DES FAISCEAUX ROULANTS.

12. *Intersections des courbes d'un faisceau pivotant et d'une droite quelconque.*

Considérons un faisceau pivotant déterminé par l'équation cartésienne du degré p

$$\varphi(x,y)+\lambda\varphi_1(x,y)=0.$$

Pour avoir les points d'intersection des diverses courbes de ce faisceau avec l'axe des x, il suffit de faire $y=0$ dans cette équation. On trouve ainsi

$$\varphi(x,0)+\lambda\varphi_1(x,0)=0.$$

L'axe des x étant une droite quelconque, on en conclut que :

THÉORÈME CV. — *Les diverses courbes d'un faisceau pivo-*

tant du degré p déterminent sur une droite quelconque, par leurs intersections avec cette droite, une division segmentaire par groupes de p points.

13. *Conséquence du numéro précédent.*

Les points multiples de la division segmentaire correspondent évidemment aux contacts de la droite avec certaines courbes du faisceau pivotant. Ces points multiples sont au nombre de $2(p-1)$; donc :

THÉORÈME CVI. — *Parmi les courbes d'un faisceau pivotant du degré p, il y en a généralement* $2(p-1)$ *qui sont tangentes à une droite quelconque.*

14. *Tangentes menées d'un point quelconque aux diverses courbes d'un faisceau roulant.*

Soit maintenant un faisceau roulant déterminé par l'équation tangentielle du degré p

$$\varphi(x, y)+\lambda\varphi_1(x, y)=0.$$

Si l'on considère une droite quelconque passant par l'origine des coordonnées, les coordonnées de cette droite sont évidemment infinies, mais le rapport $\frac{x}{y}$ a une valeur déterminée et égale (*en supposant les coordonnées rectangulaires*) à la tangente trigonométrique α de l'angle formé par la direction descendante de cette droite avec la partie positive de l'axe des x.

Cela posé, divisons par y^p le premier membre de l'équation du faisceau et supposons que y devienne infini. Nous arriverons ainsi à une équation entière, en $\left(\lim\frac{x}{y}\right)$, de la forme

$$\psi\left(\lim\frac{x}{y}\right)+\lambda\psi_1\left(\lim\frac{x}{y}\right)=0,$$

qui représentera les tangentes menées de l'origine des coordonnées aux diverses courbes du faisceau.

En désignant par α la tangente trigonométrique de l'angle formé par la direction descendante d'une de ces tangentes avec la partie positive de l'axe des x, nous aurons simplement

$$\psi(\alpha) + \lambda\psi_1(\alpha) = 0.$$

L'origine des coordonnées pouvant être prise arbitrairement, on voit que :

Théorème CVII. — *Les diverses courbes d'un faisceau roulant de la classe p déterminent autour d'un* sommet *quelconque une division tangentielle par groupes de p droites.*

15. *Conséquence du numéro précédent.*

Les rayons multiples de la division tangentielle correspondent évidemment aux passages de diverses courbes du faisceau par le sommet. Or ces rayons sont au nombre de $2(p-1)$, donc :

Théorème CVIII.— *Parmi les courbes d'un faisceau roulant de la classe p, il y en a généralement $2(p-1)$ qui passent par un point quelconque.*

CHAPITRE IV.

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES DIVISIONS HOMOGRAPHIQUES.

1. *Relation géométrique entre les points de deux groupes homologues dans les divisions segmentaires.*

Considérons deux divisions segmentaires homographiques des degrés p, q faites sur deux droites que nous appellerons l'axe des x et l'axe des α.

Parmi les groupes de points déterminés sur l'axe des x, il y en a un qui contient le point à l'infini de cette droite; nous désignerons par

$$\varphi_1(x) = 0$$

l'équation du degré $(p-1)$ qui représente les points de ce groupe, abstraction faite du point à l'infini. A ce groupe correspond, sur l'axe des α, un groupe homologue que nous désignerons par J et dont les points sont déterminés par l'équation du degré q,

$$\psi(\alpha) = 0.$$

De même il y a sur l'axe des α un groupe qui comprend le point à l'infini de cet axe et $(q-1)$ autres points déterminés par l'équation

$$\psi_1(\alpha) = 0;$$

à ce groupe correspond, sur l'axe des x, un groupe homologue que nous désignerons par I et dont les points sont déterminés par l'équation du degré p,

$$\varphi(x) = 0.$$

L'équation anharmonique qui exprime l'homographie des deux divisions peut, ainsi que nous l'avons vu au chapitre II,

être mise sous la forme

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)} \times \frac{\psi_1(\alpha)}{\psi(\alpha)} = k.$$

Cette équation résulte de l'élimination du paramètre λ entre les deux équations

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)} = \lambda$$

et

$$\frac{\psi_1(\alpha)}{\psi(\alpha)} = \frac{k}{\lambda}$$

qui expriment respectivement chacune des deux divisions par groupes.

Cela posé, construisons un *polygone directeur* relativement au groupe I, et soit D la moyenne harmonique des distances d'un point quelconque de l'axe des x aux divers côtés de ce polygone.

L'équation

$$D = \frac{h\lambda}{p},$$

dans laquelle h est une quantité constante et déterminée par le polygone directeur que l'on a choisi parmi tous ceux qui pouvaient être formés sur le groupe I, déterminera géométriquement les points du groupe en x qui correspond à une valeur quelconque de λ.

Construisons de même un *polygone directeur* relativement au groupe J, et soit Δ la moyenne harmonique des distances d'un point quelconque de l'axe des α aux divers côtés de ce polygone.

L'équation

$$\Delta = \frac{h' k}{q\lambda},$$

dans laquelle h' est une constante déterminée, définira géométriquement les points du groupe en α qui correspond à une valeur quelconque de λ.

Si l'on suppose que D et Δ se rapportent respectivement aux points de deux groupes homologues, ces quantités se trouvent correspondre à une même valeur de λ, d'où il résulte que

l'on a

$$D\Delta = \frac{hh'k}{pq} = \text{const.}$$

Cette formule exprime que :

THÉORÈME CIX. — *Étant données deux divisions segmentaires homographiques, si l'on construit, sur chacun des groupes* I *et* J, *un polygone directeur quelconque, la moyenne harmonique des distances d'un point quelconque de la première droite aux côtés du polygone directeur correspondant sera réciproquement proportionnelle à la moyenne harmonique des distances d'un point homologue de la seconde droite aux côtés de l'autre polygone directeur.*

2. *Propriété des faisceaux pivotants homographiques.*

Si l'on considère deux faisceaux pivotants homographiques des degrés p et q, ces faisceaux détermineront respectivement, sur deux transversales correspondantes, des divisions par groupes de p points et par groupes de q points. De la correspondance anharmonique des deux faisceaux il résulte que les groupes de points des deux divisions se correspondent mutuellement sans ambiguïté.

Par conséquent :

THÉORÈME CX. — *Deux faisceaux pivotants homographiques, des degrés p et q, déterminent, sur deux transversales correspondantes, deux divisions segmentaires homographiques des degrés p, q.*

3. *Propriété des faisceaux roulants homographiques.*

De même, si l'on considère deux faisceaux roulants homographiques, on arrive à ce théorème :

THÉORÈME CXI. — *Deux faisceaux roulants homographiques, des degrés p et q, déterminent, autour de deux sommets correspondants, deux divisions tangentielles homographiques, des degrés p et q.*

CHAPITRE V.

INVOLUTION SUR LES DROITES ET AUTOUR DES POINTS.

1. *Divisions polaires.*

Étant donné sur une droite un système de points fixes, au nombre de p, les conjugués d'ordre m d'un point quelconque de la droite forment un groupe de $p-m$ points que nous désignons par G_{p-m} et que nous appelons *groupe polaire* de l'ordre m.

Pour justifier cette dénomination, nous rappellerons que ces groupes de points ont déterminé la génération des polaires cartésiennes que nous avons étudiées dans le second livre de cet ouvrage.

Si le point dont on prend les conjugués d'ordre m se déplace sur la droite pour y prendre toutes les positions possibles, le groupe G_{p-m} établira sur la droite une division particulière à laquelle nous donnerons le nom de *division polaire* de l'ordre m.

Corrélativement, étant donné un faisceau de p droites fixes, convergentes, les conjuguées d'ordre m d'une droite quelconque, passant par le sommet du faisceau, forment un groupe de $p-m$ droites que nous appellerons *groupe polaire* de l'ordre m, et que nous désignerons par G_{p-m}.

Les groupes G_{p-m} qui correspondent à une droite mobile autour du sommet fixe établissent autour de ce point une *division polaire* de l'ordre m.

Considérons une division polaire établie sur une droite fixe : tous les points d'un groupe sont déterminés par l'un quelconque d'entre eux, et cette détermination a lieu sans ambiguïté, c'est-à-dire sans intervention de solutions étrangères. En effet, étant pris un point a que l'on considère

comme appartenant au groupe G_{p-m}, ce point donnera naissance à m conjugués de l'ordre $p-m$, et chacun de ces derniers points donnera lieu à un groupe de conjugués de l'ordre m, qui sera le même pour tous. C'est précisément le groupe G_{p-m} qu'il s'agissait de déterminer.

On voit ainsi qu'une division polaire, de l'ordre m, sur la droite, est un cas particulier de la division segmentaire, par groupes de $(p-m)$ points.

Un raisonnement analogue montrerait que, corrélativement, une division polaire de l'ordre m, autour d'un point, est un cas particulier de la division tangentielle, par groupe de $(p-m)$ droites.

2. *Équation aux groupes polaires.*

Désignons par x le segment compris entre une origine fixe et un point quelconque, s'il s'agit d'une division sur une droite, ou la tangente de l'angle formé par un axe fixe avec une droite quelconque, s'il s'agit d'une division autour d'un point; le système des points donnés, ou celui des droites données, sera représenté par une équation algébrique du degré p,

$$f(x)=0.$$

L'équation aux groupes G_{p-m} pourra alors être mise indifféremment sous l'une ou l'autre des deux formes :

$$(1)\qquad \sum_0^m (-1)^{m-t} C_{p-m}^{p-t} \frac{1}{P_t} (x-\alpha)^t f^{(t)}(x)=0,$$

ou

$$(2)\qquad \sum_0^{p-m} (-1)^{p-m-t} C_m^{p-t} \frac{1}{P_t} (\alpha-x)^t f^{(t)}(\alpha)=0,$$

α désignant un paramètre variable.

Nous donnerons à cette équation le nom d'*équation aux groupes polaires* de l'ordre m.

3. *Nouvelle forme de cette équation.*

D'après ce que nous avons exposé au n° 1, l'équation aux groupes polaires ne peut être qu'une forme particulière de l'équation aux groupes mobiles de $(p-m)$ éléments, telle que nous l'avons trouvée dans un chapitre précédent.

Si donc nous désignons par

$$\varphi(x) = 0$$

et

$$\varphi_1(x) = 0$$

les équations particulières de deux groupes de la division, l'équation polaire peut être mise sous la forme

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)} = \mu,$$

μ désignant un paramètre arbitraire.

Regardons $\varphi(x) = 0$ comme déterminant le groupe polaire qui correspond à une valeur infinie de α, et $\varphi_1(x) = 0$ comme déterminant les valeurs de x qui accompagnent, dans un même groupe polaire, la valeur infinie de cette quantité.

L'équation (1) montre qu'à la valeur infinie de α correspond le groupe polaire déterminé par l'équation

$$f^{(m)}(x) = 0,$$

en sorte que l'on peut poser

$$\varphi(x) = f^{(m)}(x).$$

L'équation (2) montre qu'à la valeur infinie de x correspondent pour valeur de α toutes les racines de l'équation

$$f^{(p-m)}(\alpha) = 0,$$

en sorte que, si l'on désigne par ε l'une quelconque de ces racines, c'est-à-dire une quantité telle, que l'on ait

$$f^{(p-m)}(\varepsilon) = 0,$$

on peut poser

$$\varphi_1(x) = \sum_0^{p-m-1} (-1)^{p-m-t} C_m^{p-t} \frac{1}{P_t} (\varepsilon - x)^t f^{(t)}(\varepsilon).$$

D'après cela l'équation polaire peut être mise sous la forme

$$(3) \qquad \frac{\sum_0^{p-m-1} (-1)^{p-m-t} C_m^{p-t} \frac{1}{P_t} (\varepsilon - x)^t f^{(t)}(\varepsilon)}{f^{(m)}(x)} = \mu.$$

On pourrait donner à l'équation polaire une infinité d'autres

formes, en faisant usage d'équations particulières correspondant à des groupes quelconques. Nous n'insisterons pas sur ces transformations qui n'offrent aucune difficulté; disons seulement que la forme (3) est la plus simple de celles auxquelles on peut arriver par cette méthode.

4. *Involution sur la droite et autour du point.*

Étant donné sur une droite un système de p points, à chaque groupe polaire G_m d'ordre $(p-m)$ correspond un groupe G_{p-m} d'ordre m qui constitue l'ensemble des conjugués d'ordre $(p-m)$ d'un point quelconque du premier groupe.

Les groupes G_{p-m} et G_m forment ce que nous avons appelé précédemment des *groupes associés.*

Lorsque le groupe G_{p-m} décrit une division sur la droite, le groupe G_m en décrit une autre qui possède, avec la première, une correspondance ou liaison particulière.

Nous appelons *divisions en involution* les divisions ainsi formées.

Ainsi, deux *divisions en involution* sur une droite sont formées par deux groupes de points associés relativement à un système de points fixes pris sur cette droite.

Corrélativement, nous appellerons *divisions en involution* autour d'un point les deux divisions que forment deux groupes de rayons associés relativement à un système de rayons fixes passant par ce point.

La correspondance qui existe entre deux groupes associés (de points ou de rayons) présente évidemment les propriétés caractéristiques de la correspondance anharmonique en général, et, en outre, des propriétés particulières.

Par conséquent :

La correspondance d'involution est un cas particulier de la correspondance anharmonique.

5. *Équation d'involution des degrés* (p, q).

Soit

$$f(x) = 0$$

l'équation du degré $(p+q)$, en segments on en tangentes, qui

représente le système des points en ligne droite donnés ou des droites convergentes données.

Nous désignerons par x et par α les coordonnées qui correspondent respectivement aux éléments des groupes associés mobiles G_q et G_p.

L'équation d'involution pourra être mise indifféremment sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\sum_0^p (-1)^{p-t} C_q^{p+q-t} \frac{1}{P_t} (x-\alpha)^t f^{(t)}(x) = 0$$

et

$$\sum_0^q (-1)^{q-t} C_p^{p+q-t} \frac{1}{P_t} (\alpha - x)^t f^{(t)}(\alpha) = 0.$$

Cette équation est du degré p en α et du degré q en x.

Les groupes en x sont des groupes polaires d'ordre p, et les groupes en α sont des groupes polaires d'ordre q.

Ces deux formes ont été trouvées dans la théorie des points conjugués.

6. *Forme anharmonique simplifiée de cette équation.*

On peut donner à cette équation la forme anharmonique.

Si nous désignons par e une quantité telle, que l'on ait

$$f^{(p)}(e) = 0$$

et par ε une quantité telle, que l'on ait

$$f^{(q)}(\varepsilon) = 0,$$

les deux divisions polaires en x et en α auront pour équations respectives

$$\frac{\sum_0^{q-1} (-1)^{q-t} C_p^{p+q-t} \frac{1}{P_t} (\varepsilon - x)^t f^{(t)}(\varepsilon)}{f^{(p)}(x)} = \mu$$

et

$$\frac{\sum_0^{p-1} (-1)^{p-t} C_q^{p+q-t} \frac{1}{P_t} (e-\alpha)^t f^{(t)}(e)}{f^{(q)}(\alpha)} = \nu.$$

Les paramètres μ et ν relatifs à deux groupes associés quelconques, ayant évidemment entre eux la correspondance anharmonique des degrés 1 et 1, on peut écrire

$$a\mu\nu + b\mu + c\nu + d = 0.$$

Cela posé, à $\mu = 0$ correspond le groupe en x qui contient une valeur infinie; à ce groupe correspond le groupe en α déterminé par l'équation

$$f^{(q)}(\alpha) = 0;$$

donc à $\mu = 0$ correspond $\nu = \infty$.

On verrait de même qu'à $\nu = 0$ correspond $\mu = \infty$.

Par conséquent,

$$b = 0 \quad \text{et} \quad c = 0,$$

et il reste

$$\mu\nu = k.$$

On en conclut que l'équation d'involution peut être mise sous la forme anharmonique simplifiée

$$\frac{\sum_0^{q-1} (-1)^{q-t} C_p^{p+q-t} \frac{1}{P_t} (\varepsilon - x)^t f^{(t)}(\varepsilon)}{f^{(p)}(x)}$$
$$\times \frac{\sum_0^{p-1} (-1)^{p-t} C_q^{p+q-t} \frac{1}{P_t} (e - \alpha)^t f^{(t)}(e)}{f^{(q)}(\alpha)} = k,$$

k désignant une quantité constante.

On peut encore écrire

$$kf^{(p)}(x) f^{(q)}(\alpha)$$
$$= \sum_0^{q-1} \sum_0^{p-1} (-1)^{p+q-s-t} C_p^{p+q-s} C_q^{p+q-t} \frac{1}{P_t} (\varepsilon - x)^s (e - \alpha)^t f^{(s)}(e) f^{(t)}(\varepsilon),$$

en faisant usage d'une notation que nous avons déjà employée.

7. *Détermination de la constante k.*

Pour déterminer la valeur de la constante k, nous observerons que l'équation ci-dessus est une équation anharmonique, en x et en α, des degrés p et q, dans laquelle les élé-

ments doubles, au nombre de $(p+q)$, doivent être les racines de l'équation

$$f(x)=0.$$

D'après cela, si l'on pose

$$f(x)=\mathrm{A}x^{p+q}+\mathrm{B}x^{p+q-1}+\mathrm{C}x^{p+q-2}+\ldots,$$

on trouve, sans difficulté,

$$\frac{(-1)^{p+q}p(p+1)q(q+1)f^{(q-1)}(\varepsilon)f^{(p-1)}(e)}{\mathrm{P}^2_{p+q}\left[\frac{pq}{(p+q)^2}\mathrm{B}^2-\frac{2pq}{(p+q)(p+q-1)}\mathrm{AC}\right]}=k.$$

8. *Formule algébrique.*

De ce qui précède on déduit cette singulière identité algébrique

$$\frac{\mathrm{AP}^2_{p+q}}{\mathrm{P}_p\,\mathrm{P}_q}f(x)=f^{(p)}(x)f^{(q)}(x)$$

$$-\frac{\mathrm{P}^2_{p+q}\left[\frac{pq}{(p+q)^2}\mathrm{B}^2-\frac{2pq}{(p+q)(p+q-1)}\mathrm{AC}\right]\sum_0^{q-1}\sum_0^{p-1}(-1)^{p+q-s-t}\mathrm{C}_p^{p+q-s}\mathrm{C}_q^{p+q-t}\frac{1}{\mathrm{P}_s}\frac{1}{\mathrm{P}_t}(\varepsilon-x)^s(e-x)^t f^{(s)}(\varepsilon)f^{(t)}(e)}{(-1)^{(p+q)}p(p+1)q(q-1)f^{(q-1)}(\varepsilon)f^{(p-1)}(e)},$$

dans laquelle

$$f(x)=\mathrm{A}x^{p+q}+\mathrm{B}x^{p+q-1}+\mathrm{C}x^{p+q-2}+\ldots,$$

$$f^{(p)}(e)=0,$$

$$f^{(q)}(\varepsilon)=0.$$

9. *Conditions pour qu'une équation à deux variables soit d'involution.*

L'équation d'involution des degrés (m, n), étant entièrement déterminée lorsqu'on connaît *ses points doubles*, ne contient que $(m+n)$ paramètres arbitraires.

Par conséquent :

Une équation anharmonique des degrés m, n ne peut être d'involution que s'il existe entre les coefficients de ses termes $(m+n-1)$ équations de condition.

Une équation générale des degrés m, n, à deux variables, ne peut être d'involution qu'autant que les coefficients de ses termes satisfont à mn équations de condition.

Par exemple, une équation des degrés 1 et 1, en x et α, laquelle a pour forme générale

$$ax\alpha + bx + c\alpha + d = 0,$$

n'est d'involution que s'il y a entre les paramètres une équation de condition,

$$b = c,$$

c'est-à-dire que si cette équation est symétrique en x et α.

LIVRE VI.

GÉNÉRATION ANHARMONIQUE DES COURBES. — INTERSECTIONS. — COURBES OSCULATRICES.

CHAPITRE PREMIER.

GÉNÉRATION ANHARMONIQUE ET CONSTRUCTION DES COURBES.

1. *Manière d'établir géométriquement la liaison anharmonique de deux courbes pivotantes.*

Considérons un groupe M, de m^2 points, pivotable par une courbe du degré m, et un autre groupe N, de n^2 points, pivotable par une courbe du degré n.

Nous avons vu que pour définir la liaison anharmonique de deux courbes pivotantes, il est nécessaire et suffisant de prendre arbitrairement trois couples de courbes homologues dans les deux faisceaux.

On peut alors passer d'une courbe quelconque de l'un des faisceaux à son homologue dans l'autre faisceau, d'une façon très-simple et purement géométrique que nous allons faire connaître.

Prenons une droite arbitraire X, un point m de la base M et un point n de la base N.

Par le point m menons les tangentes aux trois courbes prises à l'avance, arbitrairement, dans le premier faisceau. Ces tangentes couperont X en des points μ_1, μ_2 et μ_3.

Menons de même, par le point n, les tangentes aux trois

courbes prises à l'avance, arbitrairement, dans le deuxième faisceau, pour homologues des trois courbes précédentes. Ces tangentes coupent X en des points ν_1, ν_2 et ν_3.

Cela posé, imaginons deux courbes homologues quelconques. La tangente à la première, au point m, coupera X en un point μ, et la tangente à la seconde, au point n, coupera X en un point ν.

Les points μ et ν établissent sur la droite X deux divisions homographiques, des degrés (1, 1), *dans lesquelles μ_1 et ν_1, μ_2 et ν_2, μ_3 et ν_3 sont trois couples de points homologues.*

En effet, le point μ détermine la droite $m\mu$. Cette droite, considérée comme tangente à une courbe du premier faisceau, détermine une seule courbe de ce faisceau. Cette courbe détermine son homologue dans le second faisceau, laquelle détermine à son tour sa tangente $n\nu$ qui coupe l'axe X au point ν.

Un raisonnement analogue fait voir comment on passe du point ν au point μ.

Donc les points μ et ν se correspondent mutuellement sans ambiguïté, et conséquemment ils déterminent sur X deux divisions homographiques des degrés 1, 1.

Il est clair d'ailleurs que μ_1 et ν_1, μ_2 et ν_2, μ_3 et ν_3 forment dans ces divisions trois couples de points homologues.

Conséquemment, pour être à même de passer d'une courbe à son homologue, par voie purement géométrique, il suffit de savoir passer d'un point à son homologue, dans des divisions homographiques des degrés 1, 1, établies sur une même droite, et définies par trois couples de points homologues.

Cette question peut être résolue géométriquement de plusieurs manières; mais nous sortirions du cadre de cet ouvrage si nous entrions dans des détails à ce sujet (*).

Observons ici qu'on peut définir les trois couples de courbes homologues qui sont prises arbitrairement, en se donnant trois points a, b, c du plan par chacun desquels doivent passer deux courbes homologues.

(*) *Voir* la *Géométrie supérieure* de M. Chasles.

2. *Principe de la génération anharmonique des courbes.*

Nous avons vu dans le livre V que :

Si deux courbes pivotantes, des degrés m et n, sont liées anharmoniquement, le lieu géométrique des intersections des courbes homologues est une courbe géométrique du degré $(m+n)$ passant par tous les pivots (*).

Comme d'ailleurs la liaison anharmonique des deux courbes peut être obtenue par des constructions très-simples et purement géométriques, il est possible de construire les courbes de degrés supérieurs au moyen des groupes de points résultant des intersections de deux courbes pivotantes de degrés moindres.

Soit p le degré de la courbe que l'on veut construire; décomposons-le en deux parties entières, posant

$$p = m + n.$$

Prenons un groupe arbitraire de $\frac{m^2+3m-2}{2}$ points et un autre groupe de $\frac{n^2+3n-2}{2}$ points.

Le premier groupe pourra être *pivoté* par une courbe du degré m; sous ce point de vue, il déterminera de lui-même $\frac{m^2-3m+2}{2}$ autres points, qui s'ajouteront à ceux qui ont été pris arbitrairement, pour constituer une *base* de m^2 pivots. De même, le second groupe pourra être pivoté par une courbe du degré n et déterminera $\frac{n^2-3n+2}{2}$ autres points qui formeront avec lui un groupe de n^2 pivots.

Pour définir la liaison anharmonique des deux courbes pivotantes, il suffira de prendre, dans le plan, trois nouveaux points arbitraires, par chacun desquels devront passer deux courbes homologues.

(*) CHASLES, Deux théorèmes généraux sur les courbes et les surfaces géométriques de tous les ordres (*Comptes rendus*, 28 décembre 1857).

Les points d'intersection des courbes homologues engendreront alors une courbe du degré p, laquelle passera par tous les pivots et par les trois points arbitraires dont nous venons de parler, soit en tout par (m^2+n^2+3) points, parmi lesquels il y en a $\frac{m^2+n^2+3(m+n)+2}{2}$ qui ont été pris arbitrairement.

3. *Construction des coniques.*

On a identiquement

$$\frac{m^2+n^2+3(m+n)+2}{2} = \frac{p^2+3p}{2} - (mn-1).$$

Si p est égal à 2, on a nécessairement $m=1$, et le nombre précédent devient égal à 5.

Par conséquent, la conique passant par cinq points donnés arbitrairement peut toujours être construite par les intersections de deux rayons pivotants liés anharmoniquement l'un à l'autre.

Deux des points donnés peuvent être pris pour pivots, et les trois autres représentent les points arbitraires du plan par chacun desquels doit passer un couple de rayons homologues.

4. *Difficulté lorsque p dépasse 2. — Question préalable.*

La construction d'une courbe du degré p, au moyen de deux courbes pivotantes des degrés m et n, se faisant au moyen de $\left[\frac{p(p+3)}{2} - (mn-1)\right]$ points arbitraires, et ce nombre étant inférieur à $\frac{p(p+3)}{2}$ dès que p surpasse 2, il en résulte que pour la construction des courbes d'un degré supérieur à 2, on ne pourra pas former les bases *à priori*, au moyen de groupements de quelques-uns des points donnés.

La détermination des bases devient alors une question préalable, et nous allons examiner ce qu'il y a d'arbitraire dans cette détermination.

Supposons qu'on ait donné $\frac{p(p+3)}{2}$ points pour déter-

miner une courbe du degré p qu'il s'agit de construire au moyen de courbes pivotantes des degrés m et n. (On suppose $m+n=p$).

Rapportons la figure à deux axes de coordonnées, en géométrie cartésienne.

Mettons à part trois des points donnés, et soient (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) leurs coordonnées.

Soient en outre a et b les coordonnées de l'un quelconque des autres points donnés.

Désignons :

Par $\varphi(x, y)=0$, l'équation de la génératrice inconnue, du degré m, qui passe par le point (a_1, b_1);

Par $\varphi_1(x, y)=0$, l'équation de la génératrice inconnue, du degré m, qui passe par le point (a_2, b_2);

Par $\psi(x, y)=0$, l'équation de la génératrice inconnue, du degré n, qui passe par le point (a_1, b_1);

Par $\psi_1(x, y)=0$, l'équation de la génératrice inconnue, du degré n, qui passe par le point (a_2, b_2).

La détermination des bases revient évidemment à celle des coefficients de ces quatre équations. Dans chacune d'elles on peut supposer que l'un des coefficients a été pris égal à l'unité. Le nombre des coefficients inconnus est alors égal à

$$[m(m+3)+n(n+3)] \quad \text{ou} \quad (p^2+3p-2mn).$$

Cela posé, les courbes pivotantes des degrés m et n ont pour équations

$$\varphi(x, y)+\mu\varphi_1(x, y)=0$$

et

$$\psi_1(x, y)+\nu\psi(x, y)=0,$$

μ et ν désignant deux paramètres arbitraires; et la relation, entre deux valeurs de μ et de ν correspondant à deux génératrices homologues, est nécessairement de la forme

$$a\mu\nu+b\mu+c\nu+d=0.$$

Or, les équations $\varphi=0$ et $\psi=0$ représentant deux génératrices homologues, on doit avoir $\nu=\infty$ pour $\mu=0$.

De même, $\varphi_1 = 0$ et $\psi_1 = 0$ représentant deux génératrices homologues, on doit avoir $\mu = \infty$ pour $\nu = 0$.

Par conséquent, l'équation en μ et ν se réduit à la forme simple

$$\mu\nu = k.$$

On peut d'ailleurs déterminer la valeur de k en observant que par le point (a_3, b_3) doivent passer deux courbes homologues, d'où il résulte qu'à

$$\mu = -\frac{\varphi(a_3, b_3)}{\varphi_1(a_3, b_3)}$$

correspond

$$\nu = -\frac{\psi_1(a_3, b_3)}{\psi(a_3, b_3)},$$

et que l'on a

$$k = \frac{\varphi(a_3, b_3)}{\varphi_1(a_3, b_3)} \times \frac{\psi_1(a_3, b_3)}{\psi(a_3, b_3)}.$$

D'après cela, l'équation de la courbe à construire peut être présentée sous la forme

$$\frac{\varphi(x, y)}{\varphi_1(x, y)} \times \frac{\psi(x, y)}{\psi_1(x, y)} = \frac{\varphi(a_3, b_3)}{\varphi_1(a_3, b_3)} \times \frac{\psi_1(a_3, b_3)}{\psi(a_3, b_3)}.$$

Cette courbe devant passer par tous les points (a, b), on doit avoir, pour chacun de ces points, lesquels sont au nombre de $\left(\frac{p^2+3p}{2} - 3\right)$, la relation suivante

$$\frac{\varphi(a, b)\psi_1(a, b)}{\varphi_1(a, b)\psi(a, b)} = \frac{\varphi(a_3, b_3)\psi_1(a_3, b_3)}{\varphi_1(a_3, b_3)\psi(a_3, b_3)};$$

de là $\left(\frac{p^2+3p}{2} - 3\right)$ équations entre les coefficients cherchés.

En y ajoutant les équations

$$\varphi(a_1, b_1) = 0,$$
$$\psi(a_1, b_1) = 0,$$
$$\varphi_1(a_2, b_2) = 0,$$
$$\psi_1(a_2, b_2) = 0,$$

qui résultent des hypothèses que nous avons faites sur la nature des fonctions φ, φ_1, ψ, ψ_1, on a définitivement entre les coefficients cherchés $\left(\frac{p^2+3p}{2}+1\right)$ équations.

On se rend d'ailleurs compte que ces équations sont *suffisantes* pour exprimer complétement que les groupes cherchés seront aptes à la construction de la courbe.

En résumé, les $(p^2+3p-2mn)$ coefficients inconnus doivent satisfaire à $\left(\frac{p^2+3p}{2}+1\right)$ équations seulement; d'où il résulte que $\left[\frac{p^2+3p}{2}-(2mn+1)\right]$ de ces coefficients peuvent être pris arbitrairement, et qu'ils déterminent les $(2mn+1)$ autres, sauf les cas d'incompatibilité ou d'indétermination qui pourraient se présenter dans le système des équations à résoudre.

Au lieu de prendre *à priori* $\left[\frac{p^2+3p}{2}-(2mn+1)\right]$ des coefficients qui figurent comme inconnus dans nos équations, on peut compléter le système des équations données en y ajoutant $\left[\frac{p^2+3p}{2}-(2mn+1)\right]$ équations arbitraires. Si l'on désigne par (α, β) les coordonnées d'un point (donné ou construit, mais connu) de la courbe cherchée, on peut exprimer que ce point fait partie de l'un des groupes de pivots en posant simplement, soit

$$\varphi(\alpha, \beta)=0,$$

soit

$$\psi(\alpha, \beta)=0,$$

suivant qu'on veut faire entrer ce point dans la première ou la deuxième base.

L'indétermination qui règne dans le choix des bases génératrices peut donc être traduite en ces termes simples :

Qu'on peut généralement placer $\left[\frac{p^2+3p}{2}-(2mn+1)\right]$ *des pivots en des points connus de la courbe à construire.*

Le nombre des pivots arbitraires peut encore s'écrire

$$\frac{(m-n)^2+3p-2}{2};$$

celui des pivots non arbitraires est

$$\frac{(p-1)(p-2)}{2}.$$

5. *Solution générale du problème.*

D'après cela, la solution générale du problème de la détermination des bases peut être effectuée comme il suit.

On divisera les points donnés en trois groupes :

1° Les points (α, β) que l'on veut faire entrer dans la première base.

2° Les points (α', β') que l'on veut faire entrer dans la deuxième base.

[Le nombre total des points de ces deux groupes doit être égal à $\frac{(m-n)^2+3p-2}{2}$].

3° Les points (a, b), au nombre de $(2mn+1)$, qui ne doivent faire partie d'aucune base.

Considérant alors : 1° deux fonctions $\varphi(x, y)$ et $\varphi_1(x, y)$, du degré m, ayant chacune un paramètre connu et $\frac{m(m+3)}{2}$ paramètres inconnus; 2° deux fonctions $\psi(x, y)$ et $\psi_1(x, y)$, du degré n, ayant chacune un paramètre connu et $\frac{n(n+3)}{2}$ paramètres inconnus, on déterminera les (m^2+n^2+3p) inconnues au moyen des six systèmes d'équations :

$$\varphi(\alpha, \beta)=0, \quad \varphi_1(\alpha, \beta)=0,$$
$$\psi(\alpha', \beta')=0, \quad \psi_1(\alpha', \beta')=0,$$
$$\frac{\varphi(a, b)}{\varphi_1(a, b)}=0, \quad \frac{\psi(a, b)}{\psi_1(a, b)}=0.$$

Le nombre de ces équations est précisément égal à celui des inconnues.

Les $[(m-n)^2+3p-2]$ premières sont linéaires; les $(2mn+1)$ dernières sont du second degré.

Ayant déterminé les inconnues, on posera

$$\begin{cases} \varphi(x, y)=0, \\ \varphi_1(x, y)=0, \end{cases}$$

et ces équations représenteront deux courbes dont les intersections détermineront la première base.

La difficulté du problème réside d'abord dans la détermination des coefficients inconnus, et en second lieu dans la recherche des intersections de deux courbes, intersections qui sont partiellement connues à l'avance.

6. *Simplification du problème dans le cas où m est égal à* 1.

Examinons en particulier le cas où m est égal à 1, c'est-à-dire le cas où l'on veut engendrer la courbe du degré p au moyen d'une droite pivotante et d'une courbe pivotante du degré $(p-1)$.

On prendra pour première base (le pivot de la droite) un quelconque des $\frac{p(p+3)}{2}$ points donnés.

Il s'agira alors de former la deuxième base.

Cette base doit se composer de $(p-1)^2$ pivots, parmi lesquels il y en a $\frac{p(p-1)}{2}$ d'arbitraires et $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ à déterminer.

Désignons par ξ et η les coordonnées du point que l'on choisit pour *pivot* de la droite mobile;

Par α et β les coordonnées d'un point quelconque du groupe de $\frac{p(p-1)}{2}$ points, qu'on choisira parmi les points donnés pour constituer les pivots arbitraires de la seconde base;

Par a et b les coordonnées de l'un quelconque des points donnés, au nombre de $(2p-1)$, que l'on n'a pas fait entrer dans les bases.

Prenons deux positions particulières de la droite pivotante, par exemple celles qui sont parallèles aux deux axes de coor-

données. Nous aurons pour équations de ces deux droites

$$(x-\xi)=0,$$
$$(y-\eta)=0.$$

Désignons par

$$\psi(x)=0$$

et

$$\psi_1(x)=0$$

les équations des deux courbes génératrices qui devront être les homologues de ces deux droites.

L'équation de la courbe cherchée pourra être mise sous la forme

$$(x-\xi)\psi_1(x, y)=(y-\eta)\psi(x, y).$$

Cette équation contient (p^2+p-1) coefficients arbitraires qu'il s'agit de déterminer.

Les conditions par lesquelles cette détermination doit s'effectuer sont les suivantes :

1° Chacun des points (α, β) devant entrer dans la seconde base, on posera

$$\psi(\alpha, \beta)=0$$

et

$$\psi_1(\alpha, \beta)=0,$$

ce qui donnera, entre les inconnues, $p(p-1)$ équations linéaires.

2° Chacun des points (a, b) devant appartenir à la courbe engendrée, on posera

$$(a-\xi)\psi_1(a, b)=(b-\eta)\psi(a, b),$$

ce qui donnera, entre les inconnues, $(2p-1)$ nouvelles équations linéaires.

On a ainsi un nombre d'équations, toutes linéaires, égal à $p(p-1)+2p-1$ ou à (p^2+p-1), nombre même des inconnues.

On voit par là que, dans le cas où $m=1$, la détermination des équations des deux courbes qui doivent faire connaître la seconde base par leurs intersections, dépend de la résolution d'un système de (p^2+p-1) équations simultanées du premier degré.

7. *Simplification analogue dans le cas où m est égal à 2.*

Lorsque p surpasse 2, le nombre des pivots arbitraires est toujours au moins égal à 4.

On peut donc faire $m = 2$ et combiner un faisceau de coniques pivotantes avec un faisceau de courbes pivotantes du degré $(p - 2)$.

On prendra pour première base quatre quelconques des points donnés.

La deuxième base se composera de $(p-2)^2$ pivots parmi lesquels il y en aura $\frac{(p-2)(p-3)}{2}$ d'arbitraires et $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ à déterminer.

Désignons par

$$\varphi(x, y) = 0$$

et

$$\varphi_1(x, y) = 0$$

les deux équations de deux coniques quelconques passant par la première base. Ces équations peuvent être formées sans peine, et les fonctions $\varphi(x, y)$ et $\varphi_1(x, y)$ peuvent être regardées comme entièrement connues.

Soient maintenant

$$\psi(x, y) = 0$$

et

$$\psi_1(x, y) = 0$$

les équations inconnues des deux courbes du deuxième faisceau, qui doivent être les homologues des précédentes.

L'équation de la courbe cherchée pourra être mise sous la forme

$$\varphi(x, y)\psi_1(x, y) = \varphi_1(x, y)\psi(x, y).$$

Il s'agit de déterminer les paramètres arbitraires, au nombre de $(p^2 - p - 1)$, qui entrent comme coefficients dans les fonctions ψ et ψ_1.

Or, si α et β sont les coordonnées de l'un quelconque des $\frac{(p-2)(p-3)}{2}$ points qui peuvent être pris parmi les points

donnés pour faire partie de la seconde base, on devra poser

$$\psi(\alpha, \beta) = 0, \quad \psi_1(\alpha, \beta) = 0,$$

ce qui donnera, entre les inconnues, $(p-2)(p-3)$ équations linéaires.

Si d'ailleurs a et b sont les coordonnées de l'un quelconque de ceux des points donnés, au nombre de $(4p-7)$, qui n'ont été attribués à aucune des deux bases, on devra poser

$$\varphi(a, b)\psi_1(a, b) = \varphi_1(a, b)\psi(a, b),$$

ce qui donnera, entre les inconnues, $(4p-7)$ nouvelles équations linéaires.

On a ainsi un nombre total d'équations linéaires égal à $[(p-2)(p-3)+4p-7]$ ou à (p^2-p-1), nombre même des inconnues.

Par conséquent, dans le cas où $m=2$, la détermination des deux courbes qui doivent faire connaître la seconde base dépend de la résolution de (p^2-p-1) équations simultanées du premier degré.

8. *Impossibilité d'étendre la méthode simplifiée au cas où m surpasse 2.*

La méthode simplifiée que nous venons d'indiquer ne peut pas être employée lorsque m surpasse 2.

C'est-à-dire qu'on ne peut pas en général prendre de toutes pièces parmi les points donnés la base pivotable par la courbe du degré m; et cela tient à ce que les m^2 points qui composent cette base ont entre eux des relations telles, qu'ils ne sont pas tous arbitraires.

La complication que présente alors ce problème de la construction anharmonique paraît de nature à faire rejeter la méthode si les points donnés ne contiennent pas exceptionnellement un groupe de m^2 points pivotables par la courbe du degré m.

Lorsque cette condition existe, la seconde base peut être déterminée par une méthode simplifiée analogue à celle que nous venons de décrire.

9. *Conclusions.*

En résumé :

La courbe du degré p déterminée par $\frac{p(p+3)}{2}$ *points donnés peut toujours être construite anharmoniquement :*

1° *Au moyen d'une droite et d'une courbe du degré* $(p-1)$;

2° *Au moyen d'une conique et d'une courbe du degré* $(p-2)$.

Dans le premier cas, la solution consiste :

1° A prendre arbitrairement un des points donnés pour pivot de la droite mobile.

2° A prendre aussi arbitrairement $\frac{p(p-1)}{2}$ des points donnés pour entrer dans la *base* relative à la courbe du degré $(p-1)$.

3° A déterminer les $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ points inconnus qui doivent compléter cette base.

(Pour effectuer cette détermination, on peut former les équations de deux des courbes pivotantes par la résolution d'un système de (p^2+p-1) équations linéaires simultanées dont les inconnues sont les coefficients des équations cherchées.)

4° A définir la liaison anharmonique des deux lignes pivotantes.

(Nous avons indiqué au n° 1 de ce chapitre comment la liaison anharmonique de deux courbes pivotantes de degrés quelconques peut être définie géométriquement d'une manière très-simple).

5° A construire les intersections des courbes homologues.

Dans le deuxième cas, la solution est analogue. Elle consiste :

1° A prendre arbitrairement quatre des points donnés pour former la base des coniques.

2° A prendre arbitrairement $\frac{(p-2)(p-3)}{2}$ des points donnés pour entrer dans la base relative aux courbes du degré $(p-2)$.

3° A déterminer les $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ points inconnus qui doivent compléter cette base.

(Pour cela faire, on forme les équations de deux courbes pivotantes, par la résolution d'un système de (p^2-p-1) équations linéaires simultanées dont les inconnues sont les coefficients des équations cherchées.)

4° A définir la liaison anharmonique des deux lignes pivotantes.

5° A construire les intersections des courbes homlogues.

La construction générale de la courbe du degré p, au moyen de deux courbes pivotantes dont les degrés sont, l'un et l'autre, supérieurs à 2, présente une complication qui paraît la priver d'intérêt.

CHAPITRE II.

INTERSECTIONS DES COURBES ET COURBES OSCULATRICES.

1. *Équation générale de la courbe du degré p.*

L'équation générale de la courbe du degré p peut être mise sous la forme

$$f(x,y) = \sum_0^p \sum_0^{p-s} A_{s,t} x^s y^t = 0.$$

Les coefficients $A_{s,t}$ sont au nombre de $\frac{p(p+3)}{2} + 1$; mais comme l'un d'entre eux peut toujours être pris arbitrairement, attendu que les deux membres de l'équation précédente peuvent être multipliés par un nombre quelconque, il en résulte que l'équation de la courbe du degré p ne contient que $\frac{p(p+3)}{2}$ coefficients arbitraires.

Si donc on assujettit la courbe à passer par $\frac{p(p+3)}{2}$ points donnés (α, β), cette courbe sera généralement déterminée, et les coefficients de son équation pourront être calculés par la résolution du système d'équations linéaires

$$f(\alpha, \beta) = 0,$$

en nombre égal à celui des coefficients.

2. *Cas d'indétermination.*

Il peut arriver exceptionnellement que $\frac{p(p+3)}{2}$ points donnés ne déterminent pas une courbe. C'est ce qui a lieu,

par exemple, lorsque ces points font partie d'un groupe pivotable par une courbe du degré p.

Dans ce cas, il faut ajouter à ces points, pour déterminer la courbe, un autre point extérieur au groupe pivotable.

Il y a d'ailleurs d'autres cas d'indétermination.

3. *Conditions pour qu'une courbe du degré p soit composée de deux courbes compagnes des degrés q et p—q.*

Une courbe du degré p ne pouvant être rencontrée qu'en pq points par une courbe du degré q, il en résulte que si une courbe du degré q a $(pq+1)$ points sur une courbe du degré p, elle fait nécessairement partie de cette dernière courbe, laquelle se compose alors et de la courbe en question et d'une courbe compagne du degré $(p-q)$.

Cela posé, considérons $(pq+1)$ points (α, β), appartenant à une courbe du degré q. Pour exprimer que cette courbe fait partie d'une courbe du degré p, il sera nécessaire et suffisant de poser les $(pq+1)$ équations linéaires

$$(1) \qquad f(\alpha, \beta) = 0$$

entre les coefficients de la courbe cherchée.

Si maintenant nous prenons $\frac{(p-q)(p-q+3)}{2}$ points quelconques (a, b) déterminant une courbe du degré $(p-q)$, nous exprimerons que cette courbe est associée à la courbe du degré q, pour constituer une courbe du degré p, en posant les $\frac{(p-q)(p-q+3)}{2}$ équations linéaires

$$(2) \qquad f(a, b) = 0.$$

Les systèmes (1) et (2) doivent déterminer les $\frac{p(p+3)}{2}$ coefficients de l'équation générale de la courbe du degré p et sont forcément résolubles au moyen de valeurs convenables de ces coefficients.

Or on a identiquement

$$\frac{2(pq+1)+(p-q)(p-q+3)}{2}=\frac{p(p+3)}{2}+\frac{q(q-3)}{2}+1.$$

Par conséquent, dès que q surpasse 2, les systèmes (1) et (2) contiennent un nombre d'équations supérieur de $\left[\frac{q(q-3)}{2}+1\right]$ au nombre des coefficients inconnus. Mais puisque ce système est nécessairement résoluble, il en résulte que parmi les $(pq+1)$ équations

$$f(\alpha, \beta)=0,$$

il y en a nécessairement $\left[\frac{q(q-3)}{2}+1\right]$ qui rentrent dans les $\left[pq-\frac{q(q-3)}{2}\right]$ autres et qui peuvent être supprimées comme surabondantes.

De là cette conséquence :

Pour qu'une courbe du degré q appartienne tout entière à une courbe du degré p, il suffit que $\left[pq-\frac{q(q-3)}{2}\right]$ points de la première courbe, susceptibles de la déterminer, appartiennent à la seconde (*).

4. *Conséquences de l'observation précédente.*

Il résulte de cette observation que les points d'intersection, au nombre de pq, d'une courbe du degré p avec une courbe du degré q, ne peuvent pas être considérés comme des points arbitraires de cette seconde courbe.

Parmi ces points il n'y en a que $\left[pq-\frac{q(q-3)}{2}-1\right]$

(*) JACOBI, De relationibus quæ locum habere debent inter puncta intersectionis duarum curvarum, etc. (*Journal de Crelle*, t. XV; Berlin, 1836).

ou $\frac{q(2p-q)+3q-2}{2}$ qui puissent être pris arbitrairement, et ces points déterminent les $\frac{q^2-3q+2}{2}$ autres.

De là cette nouvelle remarque :

Toute courbe du degré p qui passe par $\frac{q(2p-q)+3q-2}{2}$ *points déterminateurs d'une courbe du degré* $q < p$ *passe nécessairement par* $\frac{q^2-3q+2}{2}$ *autres points fixes de cette courbe* (*).

Observons d'ailleurs qu'on a identiquement

$$\frac{p(p+3)}{2} = \frac{q(2p-q)+3q-2}{2} + \frac{(p-q)^2+3(p-q)+2}{2},$$

par conséquent le nombre $\frac{q(2p-q)+3q-2}{2}$ est inférieur au nombre de points nécessaire pour déterminer une courbe du degré p.

5. *Intersection de deux courbes des degrés p, q, qui ont en commun un groupe de points pivotables.*

Supposons que deux courbes des degrés $p < q$ aient en commun un groupe pivotable de m^2 points ($m^2 < pq$).

La première de ces courbes pourra être construite anharmoniquement au moyen d'une pivotante Σ du degré m, passant par le groupe commun, et d'une pivotante homologue, Σ_1, du degré $(p-m)$.

La seconde courbe pourra être construite au moyen de la même pivotante Σ et d'une autre pivotante homologue, Σ_2, du degré $(q-m)$.

Il est manifeste que les courbes Σ_1 et Σ_2 sont homographiques entre elles. Elles peuvent servir à la construction d'une courbe du degré $(p+q-2m)$ qui passera par ceux

(*) CREMONA, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*; Bologne, 1862.

des points d'intersection, au nombre de $(pq - m^2)$, des deux courbes données, qui sont étrangers à la base commune, et en outre par les $(p - m)^2$ et $(q - m)^2$ pivots des génératrices Σ_1 et Σ_2.

Par conséquent :

Lorsque deux courbes, des degrés p, q, ont en commun une base pivotable de m^2 points, on peut construire une courbe du degré $(p + q - 2m)$ passant par les autres points d'intersection des deux courbes données et par deux bases de $(p - m)^2$ et de $(q - m)^2$ points, lesquelles peuvent être respectivement associées à la base commune pour la construction de chacune des courbes données.

6. *Propriétés des groupes pivotables.*

Nous avons déjà fait connaitre une propriété des groupes pivotables, laquelle consiste en ce que :

Si pq points d'une base de p^2 points sont à une courbe du degré q, les $p(p - q)$ autres points sont à une courbe du degré $(p - q)$.

On peut déduire du numéro précédent une nouvelle observation concernant les groupes pivotables.

Il suffit de supposer que $p = q$, et l'on reconnaît ainsi que :

Si m^2 points d'une base de p^2 points sont pivotables par une courbe du degré m, les $(p^2 - m^2)$ autres points de cette base sont à une courbe du degré $2(p - m)$.

Cette propriété présente un intérêt réel lorsque m surpasse $\left(\frac{p}{3} + 1\right)$.

En faisant $m = p - 1$, on reconnaît que si une base de p^2 points renferme une base de $(p - 1)^2$ points, les $(2p - 1)$ autres points de cette base sont à une simple conique.

7. *Intersection d'une courbe et d'une droite.*

La méthode de construction anharmonique des courbes que nous avons précédemment exposée peut être employée pour

déterminer élégamment les points d'intersection d'une droite avec une courbe du degré p définie par $\frac{p(p+3)}{2}$ points déterminateurs.

Soient Σ et Σ' deux génératrices homologues des degrés m et $(p-m)$; ces courbes couperont la transversale en deux groupes de points qui établiront sur cette droite deux divisions homographiques des degrés m et $(p-m)$. Les points doubles de ces divisions seront les p points d'intersection cherchés.

Rappelons ici que pour déterminer entièrement les deux divisions il suffit de connaître deux systèmes de groupes de points homologues et deux points pris respectivement dans deux groupes homologues d'un troisième système.

8. *Courbes osculatrices.*

L'observation qui a été faite au n° 4, relativement à l'intersection de deux courbes de degrés quelconques, conduit à une remarque singulière sur les courbes osculatrices.

Soit une courbe du degré p, courbe que nous désignerons par Σ, et considérons une courbe C, de degré $q < p$, définie par son équation générale. Cette équation contenant $\frac{q(q+3)}{2}$ paramètres arbitraires, on pourra généralement disposer de ces paramètres de manière à faire passer la courbe C par $\frac{q(q+3)}{2}$ points infiniment voisins d'un point m de la courbe Σ. La courbe C sera alors *osculatrice*, au point m, à cette courbe Σ.

Il suit de là que :

La courbe générale du degré $q < q$ peut être rendue osculatrice en un point donné à une courbe du degré p, l'ordre du contact étant égal à $\left[\frac{q(q+3)}{2} - 1\right]$.

Mais si nous supposons que q soit supérieur à p, l'ordre du contact *maximum* que l'on pourra établir sans que la courbe C *absorbe* la courbe Σ, c'est-à-dire sans que Σ fasse partie de sa

courbe osculatrice, se réduira au nombre

$$\frac{q(q+3)}{2} - \frac{(q-p)^2+3(q-p)}{2} - 2;$$

inférieur à celui des points nécessaires pour déterminer une courbe du degré q.

Par conséquent :

La courbe générale du degré $q > p$ ne peut être rendue osculatrice à une courbe du degré p, sans absorber cette courbe, que suivant un contact de l'ordre $\frac{q(q+3)}{2} - \frac{(q-p)^2+3(q-p)}{2} - 2$.

Il en résulte que :

En un point donné d'une courbe du degré p on peut faire passer une infinité de courbes du degré $q > p$, toutes également osculatrices à la courbe proposée.

On détermine une de ces courbes en se donnant

$$\frac{(q-p)^2+3(q-p)+2}{2}$$

points extérieurs à la courbe proposée et qui devront appartenir à la courbe osculatrice.

Et toutes ces courbes passent par $\frac{p^2-3p+2}{2}$ *points fixes de la courbe donnée, différents du point d'osculation.*

9. *Application aux courbes du troisième degré.*

En faisant $p = 3$ et $q = 4$, on reconnaît que par trois points quelconques, extérieurs à une courbe donnée du troisième degré, on peut faire passer une courbe du quatrième degré osculatrice à la première en un point donné.

Le contact est du dixième ordre, c'est-à-dire que la courbe osculatrice a onze points infiniment voisins sur la courbe proposée.

Et toutes les courbes osculatrices du quatrième degré qu'il est possible de construire passent par un même point appartenant à la courbe donnée et différent du point d'osculation.

Si l'on considère en particulier deux de ces courbes osculatrices, on voit qu'elles ont douze points communs sur la courbe du troisième degré considéré. Par conséquent, leurs quatre autres points d'intersection sont en ligne droite.

Et généralement :

Lorsque deux courbes de degré q osculent en un même point une courbe du degré $p < q$, les $q(q-p)$ points d'intersection des deux premières non situés sur la dernière sont à une courbe du degré $(q-p)$.

LIVRE VII.

PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME DE POINTS NON EN LIGNE DROITE. — GROUPES ASSOCIÉS SUR LES CONIQUES. — TRANSFORMATION DES FIGURES.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME DE POINTS NON EN LIGNE DROITE.

§ I. — Points centraux.

1. *Définition des points centraux.*

Considérons un système de points du plan

$$A_1, A_2, \ldots, A_s, \ldots, A_p,$$

et un point quelconque V.

Le produit des distances

$$VA_1 \times VA_2 \times \ldots \times VA_s \times \ldots \times VA_p$$

varie quand V se déplace, et devient *maximum* pour certaines positions du point V. Nous appelons ces positions les *points centraux* du système proposé.

2. *Détermination analytique.*

Pour déterminer analytiquement les points centraux, nous rapporterons la figure à deux axes rectangulaires. Soient

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_s, y_s), \ldots, (x_p, y_p),$$

les coordonnées des points donnés, (x, y) celles du point V.

Nous désignerons par P l'expression

$$P = \overline{VA_1}^2 \times \overline{VA_2}^2 \times \ldots \times \overline{VA_s}^2 \times \ldots \times \overline{VA_p}^2,$$

qui devient maxima en même temps que sa racine, et par P_s cette même expression divisée par le facteur $\overline{VA_s}^2$.

On a

$$P = [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]\,[(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2] \ldots$$
$$\times [(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2] \ldots [(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2],$$

et les coordonnées des points centraux doivent satisfaire aux deux équations simultanées

$$\frac{dP}{dx} = 2 \sum_1^p (x - x_s)\, P_s = 0,$$

$$\frac{dP}{dy} = 2 \sum_1^p (y - y_s)\, P_s = 0.$$

Chacune de ces équations représente une courbe du degré $(2p - 1)$. Les deux courbes se coupent en $(2p - 1)^2$ points, réels ou imaginaires.

3. *Solutions étrangères.*

Il ne faut pas conclure de ce qui précède que les points centraux d'un système de p points du plan soient au nombre de $(2p - 1)^2$. Les équations précédentes sont vérifiées par le système (x_s, y_s), qui correspond à la position A_s du point V, position pour laquelle P s'annule. Par conséquent il faut éliminer, comme étrangers à la question, les p points donnés.

Restent $(2p - 1)^2 - p$ ou $[(2p - 1)(2p - 2) + (p - 1)]$ points, parmi lesquels se trouvent probablement des points imaginaires.

4. *Disparition des solutions imaginaires.*

On peut déterminer isolément les points réels qui satisfont à la question en ayant recours aux quantités imaginaires de la forme $(a + b\sqrt{-1})$.

Les deux équations dérivées, posées au n° 2, peuvent s'écrire

$$\sum_1^p \frac{(x-x_s)}{(x-x_s)+(y-y_s)^2}=0,$$

$$\sum_1^p \frac{(y-y_s)}{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2}=0.$$

Et dans l'hypothèse où x, y, x_s, y_s représentent des quantités réelles, on peut substituer à ces deux équations l'équation unique

$$\sum_1^p \frac{(x-x_s)-(y-y_s)\sqrt{-1}}{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2}=0.$$

Observant que

$$(x-x_s)^2+(y-y_s)^2$$
$$=[(x-x_s)+(y-y_s)\sqrt{-1}]\,[(x-x_s)-(y-y_s)\sqrt{-1}],$$

on aura simplement

$$\sum_1^p \frac{1}{(x-x_s)+(y-y_s)\sqrt{-1}}=0,$$

ou encore

$$\sum_1^p \frac{1}{(x+y\sqrt{-1})-(x_s+y_s\sqrt{-1})}=0.$$

Désignons par z et z_s des *coordonnées symboliques*, telles que l'on ait

$$z=x+y\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad z_s=x_s+y_s\sqrt{-1}.$$

Nous poserons

$$f(z)=(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_s)\ldots(z-z_p),$$

et les points donnés pourront être regardés comme les *points racines* de l'équation entière et du degré p

$$f(z)=0.$$

En effet, toute racine z_s de cette équation, étant ramenée à la forme $(x_s+y_s\sqrt{-1})$, fera connaître l'abscisse x_s et l'ordonnée y_s du point A_s.

L'équation

$$\sum_1^p \frac{1}{(x+y\sqrt{-1})-(x_s+y_s\sqrt{-1})}=0$$

pourra s'écrire

$$\sum_1^p \frac{1_s}{z-z_s}=0,$$

ou plus simplement

$$f'(z)=0.$$

Elle est du degré $(p-1)$; chacune de ses racines étant ramenée à la forme $(\xi_t+\eta_t\sqrt{-1})$ fera connaître l'abscisse ξ_t et l'ordonnée η_t d'un point central du système donné.

Par conséquent,

Les points centraux d'un système de p points du plan sont au nombre de $(p-1)$.

Les $(2p-1)^2$ points trouvés au n° 2 se composent :

1° Des p points donnés;

2° Des $(p-1)$ points centraux;

3° Des $(2p-1)(2p-2)$ points imaginaires; ce dernier nombre est forcément pair.

5. *Points centraux des différents ordres.*

Le système des p points donnés ayant donné naissance à un système de $(p-1)$ points centraux du premier ordre, ce dernier donnera naissance à $(p-2)$ points centraux du second ordre, déterminés par l'équation

$$f''(z)=0.$$

En général, il y a $(p-m)$ points centraux de l'ordre m, lesquels sont définis par l'équation

$$f^{(m)}(z)=0.$$

Le point central d'ordre $(p-1)$ est déterminé par l'équation linéaire

$$f^{(p-1)}(z)=0;$$

il jouit d'une propriété remarquable.

Posons

$$f(z) = z^p + A_1 z^{(p-1)} + A_2 z^{(p-2)} + \ldots,$$

$A_1, A_2, \ldots$, étant des coefficients de la forme $(a + b\sqrt{-1})$. Nous aurons

$$f^{(p-1)}(z) = 1.2\ldots p.z + 1.2\ldots(p-1)A_1.$$

L'équation

$$f^{(p-1)}(z) = 0$$

a donc pour racine

$$z = -\frac{A_1}{p}.$$

Comme d'ailleurs

$$A_1 = -\sum(x_s + y_s\sqrt{-1}),$$

on a

$$z = \frac{1}{p}\sum x_s + \frac{\sqrt{-1}}{p}\sum y_s.$$

Si l'on désigne par α et β les coordonnées du point central d'ordre $(p-1)$, on aura

$$z = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

et par conséquent

$$\alpha = \sum\frac{x_s}{p}, \quad \beta = \sum\frac{y_s}{p}.$$

Donc

Le point central d'ordre $(p-1)$ est le centre de gravité du système proposé.

Il en résulte que :

Le système des points centraux d'ordre quelconque admet le même centre de gravité que le système donné.

§ II. — Groupes associés.

6. *Définition des conjugués d'un point.*

Soient toujours

$$A_1, A_2, \ldots, A_p$$

un système de p points donnés dans le plan, S un autre point fixe, V un point mobile.

L'expression

$$\frac{VA_1 \times VA_2 \times \ldots \times VA_s \times \ldots \times VA_p}{\overline{VS}^p}$$

varie quand V se déplace et devient *maxima* pour certaines positions du point mobile.

Nous appelons ces positions les *points conjugués* de S relativement au système donné.

7. *Détermination analytique.*

Rapportons la figure à deux axes rectangulaires. Soient

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \ldots, \quad (x_s, y_s), \ldots, \quad (x_p, y_p)$$

les coordonnées des points donnés, a et b celles du point S, et x et y celles de V.

Posons

$$P = \overline{VA_1}^2 \times \overline{VA_2}^2 \times \ldots \times \overline{VA_s}^2 \times \ldots \times \overline{VA_p}^2,$$

il s'agira de rendre *maxima* l'expression

$$\frac{P}{\overline{VS}^{2p}}.$$

On a

$$P = [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2]\,[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2] \ldots$$
$$\times [(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2] \ldots [(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2],$$

$$\overline{VS}^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2,$$

et les coordonnées des points conjugués doivent satisfaire aux deux équations simultanées

$$\frac{d}{dx}\frac{P}{\overline{VS}^{2p}} = \frac{\overline{VS}^2 \dfrac{dP}{dx} - 2(x-a)P}{\overline{VS}^{4p-2}} = 0,$$

$$\frac{d}{dy}\frac{P}{\overline{VS}^{2p}} = \frac{\overline{VS}^2 \dfrac{dP}{dy} - 2(y-b)P}{\overline{VS}^{4p-2}} = 0,$$

qu'on peut encore écrire

$$[(x-a)^2+(y-b)^2]\sum_1^p (x-x_s)P_s=(x-a)P,$$

$$[(x-a)^2+(y-b)^2]\sum_1^p (y-y_s)P_s=(y-b)P,$$

en désignant par P_s le quotient $\frac{P}{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2}$.

Les termes du degré $(2p+1)$ disparaissent quand on développe ces équations; chacune d'elles représente donc une courbe du degré $2p$, et les deux courbes se coupent en $4p^2$ points, réels ou imaginaires.

8. *Solutions étrangères.*

Il ne faut pas en conclure que les conjugués de S soient au nombre de $4p^2$. Les équations précédentes admettent des solutions étrangères; elles sont vérifiées par le système (x_s, y_s), qui correspond à la position A_s du point V, pour laquelle $\frac{P}{\overline{VS}^{2p}}$ s'annule, et par le système (a, b) qui correspond à la position S du point V, pour laquelle $\frac{P}{\overline{VS}^{2p}}$ devient infini.

Par conséquent, il faut éliminer, comme étrangers à la question, les p points donnés et le point S.

Restent $[4p^2-p-1]$ ou $[2p(2p-1)+(p-1)]$ points, parmi lesquels se trouvent probablement des points imaginaires.

9. *Disparition des solutions imaginaires.*

On peut, en ayant recours aux quantités imaginaires, déterminer séparément les solutions réelles qui conviennent à la question.

Les équations du n° 2 peuvent s'écrire

$$\sum_1^p \frac{x-x_s}{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2}-\frac{p(x-a)}{(x-a)^2+(y-b)^2}=0,$$

$$\sum_1^p \frac{y-y_s}{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2}-\frac{p(x-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2}=0.$$

Et dans l'hypothèse où x, y, a, b, x_i, y_i sont des quantités réelles, on peut leur substituer l'équation unique

$$\sum_1^p \frac{1}{(x-x_i)+(y-y_i)\sqrt{-1}} - \frac{p}{(x-a)+(y-b)\sqrt{-1}} = 0.$$

Posons

$$z = x + y\sqrt{-1},$$
$$z_i = x_i + y_i\sqrt{-1},$$
$$\alpha = a + b\sqrt{-1}$$

et

$$f(z) = (z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_i)\ldots(z-z_p).$$

Les points donnés seront les *points racines* de l'équation entière, du degré p,

$$f(z) = 0,$$

dont chaque racine z_i, ramenée à la forme $x_i + y_i\sqrt{-1}$, détermine les coordonnées x_i et y_i du point A_i.

L'équation aux points conjugués pourra s'écrire

$$\sum_1^p \frac{1}{z-z_i} - \frac{p}{z-\alpha} = 0,$$

ou, plus simplement,

$$(z-\alpha)f'(z) - pf(z) = 0.$$

Cette équation est du degré $(p-1)$, attendu que le coefficient du terme du degré p s'y réduit à zéro. Chacune de ses racines, étant ramenée à la forme $(\xi_i + \eta_i\sqrt{-1})$, détermine l'abscisse ξ_i et l'ordonnée η_i d'un point conjugué de S.

Par conséquent :

Les conjugués d'un point relativement à un système de p points du plan sont au nombre de $(p-1)$.

Les p^2 points trouvés au n° 2 se composent :

1° Des p points donnés ;

2° Du point S;

3° Des $(p-1)$ conjugués de S ;

4° De $2p(2p-1)$ points imaginaires. Ce dernier nombre est forcément pair.

10. *Points conjugués des différents ordres; groupes associés.*

Le système des p points donnés ayant donné naissance aux $(p-1)$ conjugués du premier ordre de S, définis par l'équation du degré $(p-1)$

$$f_1(z) = (z-\alpha)f'(z) - pf(z) = 0,$$

ceux-ci donnent naissance aux $(p-2)$ conjugués du second ordre, définis par l'équation du degré $(p-2)$

$$f_2(z) = (z-\alpha)f_1'(z) - pf_1(z) = 0.$$

Ces derniers donneront naissance aux conjugués du troisième ordre, et ainsi de suite.

En se reportant au chapitre Ier du livre II, on voit, sans nouveaux calculs, que l'équation, du degré $(p-n)$, aux conjugués de l'ordre n, peut être mise indifféremment sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\sum_0^n (-1)^{n-t} C_{p-n}^{p-t} \frac{1}{P_t} (z-\alpha)^t f^{(t)}(x) = 0,$$

$$\sum_0^{p-n} (-1)^{p-n-t} C_n^{p-t} \frac{1}{P_t} (\alpha - z)^t f^{(t)}(\alpha) = 0.$$

Si dans ce système on change n en $p-n$, on trouve, pour l'équation du degré n aux conjugués d'ordre $p-n$, les deux formes

$$\sum_0^{p-n} (-1)^{p-n-t} C_n^{p-t} \frac{1}{P_t} (z-\alpha)^t f^{(t)}(z) = 0,$$

$$\sum_0^n (-1)^{n-t} C_{p-n}^{p-t} \frac{1}{P_t} (\alpha - z)^t f^{(t)}(\alpha) = 0.$$

En comparant ce système au précédent, on voit que l'un des deux reproduit l'autre par la permutation des lettres α et x.

Par conséquent :

Si un point est conjugué d'ordre n d'un autre point relativement à un système de p points du plan, le second point est conjugué d'ordre $(p-n)$ du premier relativement au même système.

D'après cela, les points du plan peuvent être rangés en *groupes associés*, G_{p-n} et G_n, de $(p-n)$ et de n points, tels que chaque point du premier groupe admette les points du second pour conjugués d'ordre $p-n$, tandis que chaque point du second groupe admettra les points du premier pour conjugués d'ordre n.

11. *Cas où* S *est à l'infini.*

Si l'on suppose que S aille à l'infini dans une direction quelconque, l'équation

$$(z-\alpha)f'(z)-pf(z)=0$$

se réduit à

$$f'(z)=0.$$

Par conséquent :

Les conjugués d'un point à l'infini sont les points centraux du système donné.

Plus généralement :

Les conjugués d'ordre n d'un point à l'infini sont les points centraux d'ordre n du système donné.

Ainsi, dans cette théorie, l'infini du plan se comporte comme un simple point.

12. *Propriétés des polygones réguliers.*

Supposons que les p points donnés forment un polygone régulier dont le centre occupe l'origine des coordonnées.

Les points centraux du système, étant au nombre de $(p-1)$ et devant évidemment former une figure qui aura pour axes de symétrie tous ceux (au nombe de $2p$) du polygone, se réduisent à un point multiple placé au centre du polygone.

Si donc

$$f(z)=0$$

est l'équation aux sommets du polygone, z désignant une coordonnée symbolique, on doit avoir

$$f'(z)=z^{p-1},$$

et par conséquent

$$f(z)=z^p-A.$$

Donc, *l'équation aux sommets d'un polygone régulier ayant son centre à l'origine des coordonnées est de la forme*

$$z^p = A,$$

p désignant le nombre des sommets.

Si l'on cherche les conjugués d'un point quelconque α, relativement au système des sommets du polygone, on arrive à l'équation

$$z^{p-1} = \frac{A}{\alpha}.$$

Par conséquent :

Les conjugués d'un point relativement aux sommets d'un polygone régulier de p côtés forment un polygone régulier de $(p-1)$ côtés ayant même centre que le premier.

L'équation aux conjugués d'ordre n du point α se présente sous la forme simple

$$z^{p-n} = \frac{A}{\alpha^n}.$$

Si n est inférieur à $p-2$, cette équation représente un polygone régulier ayant même centre que le polygone donné. Lorsque $n = p-2$, on a deux points symétriques relativement au centre du polygone. Lorsque $n = p-1$, on trouve un point unique, *harmonique* de V.

CHAPITRE II.

GROUPES ASSOCIÉS SUR LES CONIQUES.

1. *Propriété du cercle.*

Considérons, sur un cercle, des points

$$A_1, \quad A_2, \ldots, \quad A_p$$

au nombre de p.

Soit, en outre, un point fixe S pris sur ce cercle.

Prenant un point quelconque V du cercle, formons le faisceau

$$VA_1, \quad VA_2, \ldots, \quad VA_p$$

et menons VS.

Une droite mobile VX, issue du point V, rencontre le cercle en un point mobile X, et les *droites conjuguées* de VS, relativement au faisceau considéré, correspondent aux positions de X pour lesquelles est satisfaite la relation

$$\frac{\sin XVA_1 \times \sin XVA_2 \times \ldots \times \sin XVA_p}{\sin^p XVS} = \text{max. ou min.}$$

Cela posé, prenons un nouveau sommet V′ sur le cercle, formons le faisceau

$$V'A_1, \quad V'A_2, \ldots, \quad V'A_p$$

et menons V′S.

Si nous joignons V′ au point mobile X, les angles XVS et XV′S seront égaux ou supplémentaires, et l'on aura

$$\sin XVS = \sin XV'S.$$

De même,

$$\sin XVA_1 = \sin XV'A_1,$$
$$\sin XVA_2 = \sin XV'A_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\sin XVA_p = \sin XV'A_p.$$

On a donc, pour toute position du point X,

$$\frac{\sin XVA_1 \times \sin XVA_2 \times \ldots \times \sin XVA_p}{\sin^p XVS}$$
$$= \frac{\sin XV'A_1 \times \sin XV'A_2 \times \ldots \times \sin XV'A_p}{\sin^p XVS}.$$

Les deux membres de cette équation, dans laquelle X est variable, deviennent en même temps maximum ou minimum.

Par conséquent :

Les positions de X *qui correspondent aux droites conjuguées de* VS, *relativement au faisceau* $VA_1, VA_2, \ldots, VA_p$, *correspondent aussi aux droites conjuguées de* V'S *relativement au faisceau* $V'A_1, V'A_2, \ldots, V'A_p$.

Désignons par

$$B_1, \quad B_2, \ldots, \quad B_{p-1}$$

ces positions de X, nous dirons que les points $B_1, B_2, \ldots, B_{p-1}$ sont les *conjugués* de S relativement au système de points $A_1, A_2, \ldots, A_p$, et nous énoncerons comme il suit la propriété qui vient d'être démontrée :

Étant donnés, sur un cercle, un système de points, un autre point et ses conjugués *relativement à ce système, si l'on joint à ces derniers points un point quelconque du cercle, on forme un faisceau de droites, une autre droite passant par le sommet du faisceau et les* conjuguées *de cette droite relativement à ce faisceau.*

2. *Extension aux coniques.*

Considérons une conique, un point S sur cette courbe et un système de points

$$A_1, \quad A_2, \ldots, \quad A_p$$

situés aussi sur la conique.

Prenons un point O, extérieur au plan, pour sommet d'un cône ayant pour base la conique.

Il existe des plans qui coupent ce cône suivant des cercles; prenant un de ces plans pour *tableau* et le point O pour *point de vue*, faisons la perspective de la figure.

Nous aurons ainsi un cercle, un point s et un système de points $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

Prenons les conjugués de s relativement à ce système, nous aurons les points $b_1, b_2, \ldots, b_{p-1}$ du cercle, qui seront les perpectives des points $B_1, B_2, \ldots, B_{p-1}$ de la conique.

Ces derniers seront les *conjugués* de S, sur la conique, relativement au système $A_1, A_2, \ldots, A_p$.

Ce genre de perspective étend évidemment à la conique la précédente propriété du cercle.

Par conséquent :

Étant donnés une conique, un système de points, un autre point et ses conjugués *relativement à ce système, si l'on joint ces divers points à un point quelconque de la conique, on forme un faisceau de droites, une autre droite passant par le sommet du faisceau et les conjuguées de cette droite relativement à ce faisceau.*

3. *Groupes associés.*

Relativement à un système de points

$$A_1, \quad A_2, \ldots, \quad A_p$$

donnés sur une conique, on peut prendre les *conjugués de différents ordres* d'un point de cette courbe.

On trouvera ainsi des *groupes associés*, G_n et G_{p-n}, sur la conique, de n et de $p-n$ points, et tels qu'un point du premier groupe admettra pour conjugués d'ordre n, relativement

au système donné, tous les points du second, tandis que chaque point du second groupe admettra pour conjugués d'ordre $p-n$, relativement au même système, tous les points du premier.

Étant donnés sur une conique un système de points et deux groupes associés relativement à ce système, si l'on joint ces divers points à un point quelconque de la conique, on forme un système de droites convergentes et deux faisceaux associés relativement à ce système.

4. Nouvelle définition des points conjugués sur le cercle.

Revenons au cas particulier où la conique est un cercle.

Soient

$$A_1, \quad A_2, \ldots, \quad A_p$$

le système donné, S le point dont on prend les conjugués, o le centre du cercle.

Prenons sur le cercle un point quelconque X et menons oX, oS, oA_1, $oA_2, \ldots, oA_p$.

Les conjugués de S correspondent aux positions de X qui vérifient l'équation :

$$\frac{\sin\frac{1}{2}XoA_1 \times \sin\frac{1}{2}XoA_2 \times \ldots \times \sin\frac{1}{2}XoA_p}{\sin^p\frac{1}{2}XoS} = \text{max. ou min.}$$

Si l'on mène les cordes XS, $XA_1, XA_2, \ldots, XA_p$, et si l'on désigne par R le rayon du cercle, on aura

$$\sin\frac{1}{2}XoS = \frac{1}{2}\frac{XS}{R}, \quad \sin\frac{1}{2}XoA_1 = \frac{1}{2}\frac{XA_1}{R},$$

$$\sin\frac{1}{2}XoA_2 = \frac{1}{2}\frac{XA_2}{R},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\sin\frac{1}{2}XoA_p = \frac{1}{2}\frac{XA_p}{R}.$$

Par conséquent les conjugués de S correspondent aux posi-

tions de X qui vérifient la relation

$$\frac{XA_1 \times XA_2 \times \ldots \times XA_p}{\overline{XS}^p} = \max.$$

Cette propriété pourrait servir de définition relativement aux *conjugués* de S. On peut en conclure que ces points sont *conjugués* de S dans le sens que nous avons adopté au chapitre précédent.

CHAPITRE III.

TRANSFORMATION DES FIGURES AU MOYEN DES COORDONNÉES SYMBOLIQUES.

1. *Méthode générale de transformation.*

Soient $z = x + y\sqrt{-1}$, $z' = x' + y'\sqrt{-1}$ deux variables, et

$$f(z, z') = 0 \tag{1}$$

une équation anharmonique des degrés p en z, p' en z'.

On peut regarder z comme la coordonnée symbolique d'un point M du plan rapporté à deux axes rectangulaires OX et OY, et z' comme la coordonnée symbolique d'un point M′ du plan, rapporté à deux axes rectangulaires O′X′ et O′Y′.

Si M décrit une figure quelconque sur le premier plan, M′ décrit une figure correspondante sur l'autre plan.

La liaison des deux figures est telle, que p points de la première et p' points de la seconde se correspondent mutuellement.

2. *Conservation des angles.*

En différentiant l'équation (1), on trouve

$$f'_z\, dz + f'_{z'}\, dz' = 0,$$

d'où

$$\frac{dz'}{dz} = -\frac{f'_z}{f'_{z'}}.$$

Le rapport $\frac{dz'}{dz}$ est donc indépendant de la direction du déplacement infiniment petit qu'on peut donner au point M.

C'est ce qu'on exprime en disant que z' est une fonction *monogène* de z. Cette expression est due à M. Cauchy (*).

Or on a

$$\frac{dz'}{dz} = \frac{dx'}{dz} + \sqrt{-1}\,\frac{dy'}{dz}$$

$$= \frac{\frac{dx'}{dx}\,dx + \frac{dx'}{dy}\,dy + \sqrt{-1}\left(\frac{dy'}{dx}\,dx + \frac{dy'}{dy}\,dy\right)}{dz},$$

d'où

$$\frac{dz'}{dz} = \frac{\frac{dx'}{dx} + \sqrt{-1}\,\frac{dy'}{dx} + \left(\frac{dx'}{dy} + \sqrt{-1}\,\frac{dy'}{dy}\right)\frac{dy}{dx}}{1 + \sqrt{-1}\,\frac{dy}{dx}}.$$

Le second membre devant être indépendant de $\frac{dy}{dx}$, il faut qu'on ait

$$\frac{dx'}{dx} + \sqrt{-1}\,\frac{dy'}{dx} = \left(\frac{dx'}{dy} + \sqrt{-1}\,\frac{dy'}{dy}\right)\frac{1}{\sqrt{-1}};$$

et comme dx, dy, dx', dy' sont des quantités réelles, cette équation se décompose en ces deux autres :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx'}{dx} &= \frac{dy'}{dy}, \\ \frac{dx'}{dy} &= -\frac{dy'}{dx}. \end{aligned}\right.$$

Soient maintenant ds et ds' deux éléments correspondants décrits par les points M et M'. On a

$$(ds')^2 = (dx')^2 + (dy')^2 = \left(\frac{dy'}{dy}\,dx\right)^2 + (dy')^2,$$

d'où

$$(ds')^2 = \left(\frac{dy'}{dy}\right)^2 (dx^2 + dy^2) = ds^2\left(\frac{dy'}{dy}\right)^2,$$

d'où enfin

$$ds' = ds\,\frac{dy'}{dy}.$$

(*) Voir *Théorie des fonctions doublement périodiques*, de MM. Briot et Bouquet, livre I, chap. I.

Cela posé, donnons à M trois déplacements infiniment petits, MP, PQ, QM, de manière à décrire un triangle infinitésimal. M′ prendra les déplacements correspondants M′P′, P′Q′, Q′M′, et l'on aura

$$MP = M'P'\frac{dy'}{dy}, \quad PQ = P'Q'\frac{dy'}{dy}, \quad QM = Q'M'\frac{dy'}{dy},$$

d'où

$$\frac{MP}{M'P'} = \frac{PQ}{P'Q'} = \frac{QM}{Q'M'}.$$

Les triangles MPQ, M′P′Q′ sont donc semblables.

Par conséquent :

Deux angles correspondants, dans les deux figures, sont toujours égaux.

3. *Méthode des rayons vecteurs réciproques.*

Si l'on fait $p = p' = 1$, l'équation (1) prend la forme

$$(3) \qquad azz' + bz + cz' + d = 0,$$

et l'on a une méthode particulière de transformation.

A la droite à l'infini de la première figure, pour laquelle $z = \infty$, correspond un point J′ de la seconde, dont la coordonnée est $-\frac{b}{a}$.

A la droite à l'infini de la seconde figure, pour laquelle $z = \infty$, correspond un point I de la première, dont la coordonnée est $-\frac{c}{a}$.

Si l'on prend le point I pour origine des coordonnées dans la première figure, et le point J′ pour origine dans la seconde, on a $b = c = 0$, et l'équation (3) se réduit à la forme

$$(4) \qquad zz' = \lambda.$$

Soit M le point correspondant à z; posons $IM = r$, et désignons par φ l'angle que fait la direction IM avec la direction positive des x. Nous aurons

$$z = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi).$$

Soit de même M′ le point correspondant à z'; posons $J'M' = r'$, et angle $M'J'X' = \varphi'$. Nous aurons

$$z' = r'(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi').$$

Posons enfin

$$\lambda = k(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha).$$

La relation (4) donnera

$$(5)\qquad \begin{cases} rr' = k, \\ \varphi + \varphi' = \alpha. \end{cases}$$

La première de ces formules montre que :

Deux rayons vecteurs correspondants, IM, J′M′, *dans les deux figures, sont* réciproques, *suivant la puissance* k.

Pour interpréter la seconde, prenons deux nouveaux rayons vecteurs correspondants IN, J′N′, faisant respectivement avec IX et J′X′ les angles ψ et ψ'. Nous aurons

$$\psi + \psi' = \alpha,$$

et, par conséquent,

$$\varphi - \psi = \psi' - \varphi'.$$

Donc :

L'angle formé par deux rayons vecteurs de la première figure est égal à l'angle formé par les deux rayons vecteurs correspondants de la deuxième figure.

On voit ainsi que le genre de transformation dont nous parlons n'est autre que la transformation dite *par rayons vecteurs réciproques,* laquelle a été employée d'abord par M. Thomson, sous le nom de *principe des images,* et étudiée par M. Liouville dans un beau Mémoire (*).

4. *Théorèmes sur les groupes associés.*

Considérons dans la première figure un système de p points défini par l'équation

$$f(z) = 0,$$

et un autre point dont la coordonnée symbolique est α.

(*) *Journal de Mathématiques,* t. XII, p. 275.

Les conjugués de ce point relativement au système donné seront déterminés par l'équation

$$(z-\alpha)f'(z)-pf(z)=0.$$

La relation qui existe entre deux points correspondants peut s'écrire

$$z=-\frac{cz'+d}{az'+b}.$$

Nous pourrions donc répéter ici les calculs et raisonnements de la page 33, et nous verrions que si

$$\varphi(z')=0$$

est l'équation du système correspondant au système donné, et si α' est la coordonnée du point correspondant à α,

$$(z'-\alpha')\varphi'(z')-p\varphi(z')=0$$

est l'équation des points qui correspondent aux conjugués de α.

Par conséquent :

Si l'on transforme par rayons vecteurs réciproques la figure formée par un système de points et deux groupes associés relatifs à ce système, on obtient un nouveau système de points et deux groupes associés relatifs à ce système.

5. *Transformation d'un cercle.*

Prenons les points I et J′ pour origines des coordonnées. Nous pourrons toujours diriger les axes IX′ et J′X′ de manière que les angles formés par ces axes avec deux rayons vecteurs correspondants soient égaux et de sens contraire. L'équation transformatrice deviendra alors

$$zz'=k \tag{6}$$

ou

$$(x+y\sqrt{-1})(x'+y'\sqrt{-1})=k.$$

On en déduit

$$xx'-yy'=k,$$
$$xy'+x'y=0;$$

d'où

$$(7)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{kx'}{x'^2+y'^2} \\ y = -\dfrac{ky'}{x'^2+y'^2}. \end{cases}$$

Si z décrit le cercle représenté par l'équation

$$x^2+y^2+mx+ny+t=0,$$

z' décrit la courbe représentée par l'équation

$$\frac{k^2}{x'^2+y'^2}+\frac{mkx'-nky'}{x'^2+y'^2}+t=0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$x'^2+y'^2+\frac{k}{t}(mx'-ny')+\frac{k^2}{t}=0.$$

Donc :

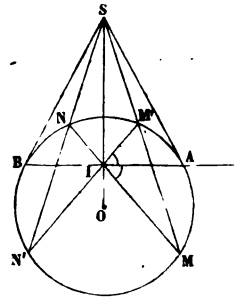
La transformée d'une circonférence est une autre circonférence.

Si la circonférence passe par I, sa transformée doit passer par l'infini. Elle a donc un rayon infiniment grand, c'est-à-dire qu'elle devient une droite.

A une droite de la première figure correspond une circonférence passant par J'.

6. *Considérations géométriques.*

Si l'on prend le conjugué M' *d'un point mobile* M *relati-*



vement à un système de deux points fixes A *et* B, *on fait une transformation par rayons vecteurs réciproques.*

Pour le démontrer, plaçons l'origine au milieu I de AB et prenons AB pour axe des x.

a désignant la demi-corde AB, nous aurons pour équation du système

$$z^2 - a^2 = 0.$$

Le conjugué du point M, dont la coordonnée symbolique est α, est donc déterminé par l'équation

$$\alpha z = a^2.$$

On a par conséquent

$$\begin{cases} \text{IM} \times \text{IM}' = a^2, \\ \text{angle MIA} = \text{angle M'IA}. \end{cases}$$

Il en résulte que le point M' appartient au cercle AMB; car si on prolonge MI jusqu'en N, on a

$$\text{IM} \times \text{IN} = a^2$$

et, par conséquent,

$$\text{IN} = \text{IM}'.$$

De plus, la droite MM' passe par le point de concours S des deux tangentes au cercle en A et en B.

En effet, désignons par b la distance OI. L'équation du cercle, rapportée aux axes IA et IS, sera

$$x^2 + y^2 + 2by - a^2 = 0.$$

Appelons m la tangente de l'angle AIM' : le système des droites IM, IM' aura pour équation

$$m^2 x^2 - y^2 = 0.$$

L'équation générale des coniques passant par MM'NN' est

$$(1 + \lambda m^2) x^2 + (1 - \lambda) y^2 + 2by - a^2 = 0,$$

λ désignant un paramètre arbitraire.

Le centre d'une de ces coniques a pour coordonnées

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = \dfrac{b}{\lambda - 1}. \end{cases}$$

Pour que la conique se réduise à deux droites, il suffit qu'elle passe par son centre, ce qui exige qu'on ait

$$\frac{b^2}{\lambda - 1} = a^2,$$

d'où

$$\lambda - 1 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Le centre correspondant, c'est-à-dire le point de rencontre des deux droites MM′ et NN′ a pour coordonnées

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = \dfrac{a^2}{b}. \end{cases}$$

Ce sont précisément les coordonnées du point S.

De là cette construction géométrique :

Pour obtenir le conjugué du point M *relativement aux deux points* A *et* B, *construisez le cercle* AMB; *menez à ce cercle les tangentes en* A *et en* B, *qui se coupent en* S; *tracez* SM : *cette droite coupe le cercle au point cherché* M′.

7. *Conséquence.*

Si le point M se meut sur un cercle passant par AB, le point M′ se meut aussi sur ce cercle.

De là cette propriété de la transformation par rayons vecteurs réciproques.

Théorème. — *Dans chacune des figures il existe un faisceau de cercles ayant une corde commune, auxquels correspond dans l'autre figure un faisceau de cercles respectivement égaux aux premiers.*

La corde commune AB, dans la première figure, a son milieu en I.

La corde commune A′B′, dans la seconde figure, a son milieu en J′.

Les rayons vecteurs correspondants IM et J′M′ ont des directions telles, que les deux angles AIM et BJ′M′ sont égaux et

de sens contraires, et des longueurs telles, que les cercles AIM et BJ′M′ sont égaux entre eux.

De là une construction très-simple pour effectuer géométriquement la transformation.

8. *Usage de la méthode des rayons vecteurs réciproques.*

La méthode des rayons vecteurs réciproques est principalement utile, en géométrie plane, pour transformer les propriétés descriptives ou métriques des figures composées de droites et de cercles.

Par exemple, la figure réciproque d'un polygone rectiligne a, b, c,..., est un polygone curviligne a', b', c',..., formé par des axes de cercle qui se croisent en J′.

Si l'on appelle *polygone circulaire* le polygone formé par des arcs de cercle qui passent tous par un même point du plan, le principe de la conservation des angles dans la transformation par rayons vecteurs réciproques permet d'étendre à ce polygone une propriété connue du polygone rectiligne, et l'on voit que :

La somme des angles intérieurs d'un polygone circulaire est égale à autant de fois deux droits qu'il y a de côtés moins deux (*).

(*) *Voir*, pour les applications de la méthode des rayons vecteurs réciproques, l'ouvrage de M. Paul Serret intitulé : *Des méthodes en Géométrie*; Paris, Mallet-Bachelier, 1855.

APPENDICE.

DESCRIPTION DES COURBES DU TROISIÈME DEGRÉ.

CHAPITRE PREMIER.

CLASSIFICATION DES COURBES DU TROISIÈME DEGRÉ.

1. *Division analytique en trois familles.*

L'équation générale des courbes du troisième degré peut être mise sous la forme

$$f(x,y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 + ex^2 + 2fxy + gy^2 + hx + ky + l = 0.$$

Si l'on considère la fonction

$$D = (ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2),$$

laquelle est le *discriminant* de la fonction homogène

$$(ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3),$$

et qui ne dépend que des coefficients des termes du troisième ordre, on pourra faire sur la valeur numérique de cette fonction trois hypothèses, savoir :

1° $D < 0$,
2° $D > 0$,
3° $D = 0$.

A chacune de ces hypothèses correspond une *famille* de

courbes, en sorte que nous admettrons la classification suivante :

1° $D < 0$, *Famille hyperbolique,*

2° $D > 0$, *Famille elliptique,*

3° $D = 0$, *Famille parabolique.*

Cette classification, purement analytique, et les dénominations que nous venons d'employer peuvent être justifiées par trois espèces de considérations géométriques que nous allons indiquer.

2. *Classification par les points à l'infini.*

Imaginons une droite menée par l'origine des coordonnées et passant par un point à l'infini, réel ou imaginaire, de la courbe, et désignons par μ le coefficient angulaire de cette droite.

Les valeurs de μ seront évidemment les racines de l'équation

$$d\mu^3 + 3c\mu^2 + 3b\mu + a = 0.$$

Posons

$$\mu = \mu' + \frac{c}{d}$$

et substituons cette valeur dans l'équation précédente, nous aurons, réductions faites, l'équation incomplète

$$\mu'^3 + 3\left(\frac{b}{d} - \frac{c}{d^2}\right)\mu' + \left(2\frac{c^3}{d^3} - 3\frac{bc}{d^2} + \frac{a}{d}\right)^2 = 0.$$

Cette équation, et par conséquent l'équation en μ, admettent

des racines réelles et inégales,

ou *des racines dont l'une est réelle tandis que les deux autres sont imaginaires et inégales,*

ou *des racines réelles, dont deux au moins sont égales,*

suivant que la fonction

$$H = 4\left(\frac{b}{d} - \frac{c^2}{d^2}\right)^3 + \left(2\frac{c^3}{d^3} - 3\frac{bc}{d^2} + \frac{a}{d}\right)^2$$

est

négative,

ou *positive,*

ou *nulle.*

Or si l'on développe la fonction H et si l'on effectue les réductions qui se présentent, on trouve

$$H = \frac{1}{d^4} D,$$

et comme le facteur $\frac{1}{d^4}$ est nécessairement positif et ne peut être nul (car d ne peut être infini), on voit que les deux fonctions H et D sont en même temps négatives, positives ou nulles.

Par conséquent :

Si $D < o$, la courbe présente à l'infini trois points réels et distincts, auxquels correspondent trois branches infinies hyperboliques, et on a la *famille hyperbolique.*

Si $D > o$, la courbe présente à l'infini un seul point réel et simple, correspondant à une branche hyperbolique. Les courbes de cette famille se composent généralement d'une branche infinie et d'une espèce d'ovale dont la forme rappelle celle d'une ellipse; de là la dénomination de *famille elliptique.*

Si $D = o$, la courbe aura à l'infini, soit un point hyperbolique et un point parabolique, soit un seul point parabolique, en attachant à l'expression *point parabolique* le sens général que nous avons précédemment défini; de là la dénomination de *famille parabolique.*

3. *Classification par les diamètres.*

Les courbes du troisième degré admettent des coniques pour diamètres du premier ordre, et des droites pour diamètres du second ordre ou diamètres harmoniques.

La classification en trois familles peut être établie par la considération des diamètres du premier ordre.

Si nous formons, en effet, l'équation du diamètre conjugué

de la direction dont le coefficient angulaire est m, en nous bornant aux termes du second degré, nous trouverons

$$(a + mb)x^2 + 2(b + mc)xy + (c + md)y^2 + \ldots = 0.$$

La nature de la conique (ellipse, hyperbole ou parabole) représentée par cette équation dépend du signe ou de la nullité de la fonction

$$(b + mc)^2 - 4(a + mb)(c + md),$$

fonction que l'on peut écrire

$$(c^2 - bd)m^2 + (bc - ad)m + b^2 - ac.$$

Les diamètres *paraboliques* correspondent aux valeurs de m, qui sont racines de l'équation

$$(c^2 - bd)m^2 + (bc - ad)m + (b^2 - ac) = 0.$$

Or cette équation a des racines

imaginaires,
ou *réelles et inégales,*
ou *égales, parfois indéterminées,*

selon que la fonction

$$D = (bc - ad)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd)$$

est

négative,
ou *positive,*
ou *nulle.*

D'où l'on conclut que le nombre des diamètres *paraboliques* est

nul dans la famille *hyperbolique,*
égal à *deux* dans la famille *elliptique,*
égal à *un* ou *indéterminé* dans la famille *parabolique.*

4. *Classification par la conique centrale.*

Enfin la division en trois familles peut encore être établie par la considération de la *courbe centrale,* laquelle est une section conique.

Si l'on forme l'équation de cette courbe

$$\frac{d^2f}{dx^2}\cdot\frac{d^2f}{dy^2}=\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)$$

en se bornant aux termes du second degré, on trouve

$$9\left[(ac-b^2)x^2+(ad-bc)xy+(bd-c^2)y^2\right]+\ldots=0.$$

Et la nature de la conique centrale dépendant évidemment du signe ou de la nullité de D, on voit que la conique centrale est

une *ellipse* dans la famille *hyperbolique*,
une *hyperbole* dans la famille *elliptique*,
une *parabole* dans la famille *parabolique*.

On pouvait le reconnaître *à priori* en observant que le nombre des points à l'infini de la conique centrale est nécessairement égal à celui des diamètres paraboliques.

5. *Résumé.*

Les considérations qui viennent d'être exposées peuvent se résumer dans le tableau suivant, qui fournit les caractères distinctifs des trois familles.

DÉSIGNATION de la famille.	VALEUR de D.	NATURE des points à l'infini.	NOMBRE des diamètres paraboliques.	NATURE de la conique centrale.
Famille hyperbolique.	$D<0$	3 points simples.	0	Ellipse.
Famille elliptique....	$D>0$	1 seul point simple.	2	Hyperbole.
Famille parabolique..	$D=0$	1 point simple et 1 point double ou 1 point triple.	1 seul ou une infinité.	Parabole.

Nous étudierons séparément chacune des trois familles et nous ferons connaître les simplifications que peut comporter l'équation générale des courbes du troisième degré. L'emploi des diamètres coniques permet d'effectuer les réductions avec une grande simplicité.

6. *Équation simplifiée de la famille hyperbolique.*

Toute asymptote d'une branche hyperbolique d'une courbe géométrique est asymptote du diamètre de sa propre direction.

Par conséquent :

L'asymptote d'une branche hyperbolique d'une courbe du troisième degré a pour diamètre de sa direction une hyperbole conique à laquelle elle est asymptote.

D'après cela, prenons pour axe des y l'asymptote d'une branche hyperbolique, et pour axe des x l'autre asymptote du diamètre de la direction de cette droite : l'équation

$$\frac{df}{dy} = 3dy^2 + 6cxy + 3bx^2 + 2gy + 2fx + k = 0$$

du diamètre conjugué de la direction de l'axe des y doit se réduire à la forme

$$xy = \text{const.};$$

on a donc nécessairement

$$b = d = f = g = 0,$$

et l'équation de la courbe du troisième degré devient

$$ax^3 + 3cxy^2 + ex^2 + hx + ky + l = 0.$$

La fonction D se réduit à $4ac^3$, et, comme elle doit être négative, on voit que ni a ni c ne peuvent être nuls et que leurs signes sont différents.

Par conséquent l'équation générale des courbes de la famille hyperbolique peut être ramenée à la forme simplifiée

$$(1) \qquad xy^2 + \varepsilon y = \alpha^2 x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

7. *Équation simplifiée de la famille elliptique.*

Les courbes de la famille elliptique ayant chacune une branche hyperbolique, on peut prendre pour axe des y l'asymptote de cette branche, et pour axe des x l'autre asymptote du

diamètre hyperbolique correspondant. En raisonnant comme précédemment et en observant que la fonction D doit être positive, on trouvera pour forme simplifiée de l'équation générale des courbes de la famille elliptique

$$(2) \qquad xy^2 + \varepsilon y = -\alpha^2 x^3 + \beta x^2 + \gamma x + d.$$

8. *Équations simplifiées de la famille parabolique.*

La famille parabolique se subdivise en deux classes, d'après la nature des points à l'infini.

PREMIÈRE CLASSE.

Un point simple et un point double à l'infini.

Au point simple à l'infini correspond une branche hyperbolique. Nous prendrons l'asymptote de cette branche pour axe des y et nous prendrons l'axe des x comme ci-dessus. Raisonnant comme précédemment et remarquant que D est nul par hypothèse et que c ne peut pas être nul, sans quoi le point à l'infini serait triple dans la direction de l'axe des y, nous trouverons pour forme simplifiée de l'équation générale des courbes de cette classe

$$(3) \qquad xy^2 + \varepsilon y = \beta x^2 + \gamma x + d.$$

DEUXIÈME CLASSE.

Un point triple à l'infini.

Laissant d'abord aux axes des coordonnées une certaine indétermination, nous prendrons pour axe des y une droite quelconque passant par le point à l'infini, et pour axe des x une droite entièrement arbitraire.

Dans cette hypothèse, l'équation en μ devant avoir trois racines infinies, on aura

$$b = c = d = 0,$$

et l'équation générale des courbes de cette classe deviendra

$$ax^3 + ex^2 + 2fxy + gy^2 + hx + ky + l = 0.$$

Le diamètre conjugué de la direction de l'axe des y a alors pour équation

$$2fx + 2gy + k = 0.$$

Il se réduit à une droite qui peut être

1° *Inclinée sur l'axe des y*;
2° *Parallèle à l'axe des y*;
3° *Située à l'infini.*

Nous examinerons séparément chacun de ces trois cas.

Premier cas. — Dans le premier cas, nous prendrons pour axe des x la droite qui vient d'être définie, et pour origine un des points d'intersection de cette droite avec la courbe, l'axe des y conservant d'ailleurs la direction du point à l'infini.

On aura alors

$$k = f = l = 0,$$

et l'équation générale posée ci-dessus se réduira à la forme

$$(4) \qquad y^2 = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x.$$

Deuxième cas. — Dans le deuxième cas, nous prendrons pour axe des y la droite même qui représente le diamètre de la direction du point à l'infini. On aura alors

$$g = k = 0,$$

et l'équation prendra la forme

$$ax^3 + ex^2 + 2fxy + hx + l = 0.$$

L'axe des x étant resté arbitraire, nous pourrons le choisir de manière à produire une simplification nouvelle.

L'équation du diamètre de la direction, dont le coefficient angulaire est m, se réduit à

$$3ax^2 + 2(e + mf)x + 2fy + h = 0.$$

A la valeur particulière

$$m = -\frac{e}{f}$$

correspond le diamètre dont l'équation est

$$3ax^2 + 2fy + h = 0.$$

Le coefficient a ne peut pas être nul, sans quoi la courbe proposée se réduirait à une conique; le coefficient f ne l'est pas non plus, sans quoi la courbe se réduirait à un système de droites parallèles, cas que nous examinerons à part; donc notre diamètre est nécessairement une parabole, que l'axe des y rencontre au point à distance finie dont l'ordonnée est

$$y = -\frac{h}{2f}.$$

Plaçons l'origine en ce point de rencontre et prenons pour axe des x la tangente à la parabole; nous aurons nécessairement

$$h = 0,$$

et l'équation générale correspondante au cas que nous étudions se réduira à la forme très-simple

$$(5) \qquad xy = \alpha x^3 + \beta x^2 + \delta.$$

Troisième cas. — Dans le troisième cas, on a nécessairement, par hypothèse,

$$f = g = 0,$$

et l'équation se réduit à

$$ax^3 + cx^2 + hx + ky + l = 0.$$

Le diamètre de la direction dont le coefficient angulaire est m a pour équation

$$3ax^2 + 2ex + (h + mk) = 0;$$

il se réduit toujours à un système de deux droites.

k ne peut pas être nul, sans quoi la courbe se réduirait à un système de trois droites parallèles, cas que nous examinerons à part; a ne peut pas non plus être nul, sans quoi la courbe serait une conique. Par conséquent, la direction définie par

$$m = \frac{e^2 - 3ah}{3ak}$$

est oblique sur l'axe des y.

Le diamètre de cette direction particulière se réduit à une droite double, passant par le point à l'infini. Prenons cette droite pour axe des y, nous aurons

$$e = 0,$$

et, par suite,

$$m = -\frac{h}{k}.$$

Prenons un axe des x parallèle à cette dernière direction, et plaçons l'origine au point d'intersection de la courbe avec l'axe des y. Nous aurons

$$l = h = 0,$$

et l'équation générale, correspondante au cas qui nous occupe, se réduira à la forme très-simple

$$(6) \qquad y = \alpha x^3.$$

Cas particulier. — Enfin, le cas que nous avons négligé tout à l'heure, celui où la courbe se réduit à un système de droites parallèles, donne évidemment lieu à l'équation simplifiée

$$(7) \qquad \alpha x^3 + \gamma x + \delta = 0.$$

9. *Dénominations newtoniennes.*

Les équations simplifiées auxquelles nous venons d'être conduits par la considération des diamètres sont analogues à celles qui ont été données par Newton dans son *Enumeratio linearum tertii ordinis.* Il en résulte que notre classification peut s'exprimer au moyen des dénominations newtoniennes. On forme ainsi le tableau suivant :

Famille hyperbolique.	Hyperboles redondantes	$(xy^2 + \varepsilon y = \underline{\alpha}^2 x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)$,
Famille elliptique....	Hyperboles défectives	$(xy^2 + \varepsilon y = -\underline{\alpha}^2 x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)$.
Famille parabolique.	PREMIÈRE CLASSE.	
	Hyperboles paraboliques	$(xy^2 + \varepsilon y = \underline{\beta} x^2 + \gamma x + \delta)$.
	Hyperbolismes de coniques	$(xy^2 + \varepsilon y = \gamma x + \delta)$.
	DEUXIÈME CLASSE.	
	Paraboles divergentes	$(y^2 = \underline{\alpha} x^3 + \beta x^2 + \gamma x)$.
	Tridents	$(xy = \underline{\alpha} x^3 + \beta x^2 + \delta)$.
	Paraboles cubiques	$(y = \underline{\alpha} x^3)$.
	Droites parallèles	$(0 = x^3 + \gamma x + \delta)$.

(Le trait placé sous une lettre indique qu'elle ne peut pas prendre la valeur zéro.)

Les équations des paraboles divergentes, des tridents, des paraboles cubiques, sont ramenées à des formes plus simples que celles qui ont été données par Newton.

10. *Nombres des espèces.*

De la discussion des équations simplifiées que nous venons de faire connaître résulterait la subdivision en espèces, laquelle a été faite par Newton et complétée par Stirling.

Voici les nombres de ces espèces, d'après Stirling :

Hyperboles redondantes.....	36
Hyperboles défectives..... ..	13
Hyperboles paraboliques.....	11
Hyperbolismes de coniques....	9
Trident	1
Paraboles divergentes.....	5
Parabole cubique.....	1
Droites parallèles.....	6
Total ..	82 espèces.

CHAPITRE II.

COURBES DE LA FAMILLE HYPERBOLIQUE.

1. *Forme générale des hyperboles redondantes.*

Les *hyperboles redondantes*, ainsi appelées par Newton *parce qu'elles surpassent les sections coniques quant au nombre des branches hyperboliques*, sont caractérisées par l'existence de trois points hyperboliques, et par conséquent de trois asymptotes, de directions deux à deux différentes.

Ces trois asymptotes forment un triangle qui peut se réduire à un point.

La *fig.* 1 (*Pl. I*), à laquelle nous renvoyons le lecteur, représente une de ces courbes.

En prenant pour axe des y une des asymptotes de la courbe et pour axe des x l'autre asymptote du diamètre hyperbolique de la direction de la première, on ramène l'équation générale des hyperboles redondantes à la forme

$$(1) \qquad xy^2 + \varepsilon y = \alpha^2 x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,$$

α ne pouvant être nul.

2. *Hyperboles médianes.*

Les diamètres hyperboliques des directions des branches infinies jouissent d'une propriété remarquable.

Menons une parallèle à OY ; elle rencontrera la courbe en deux points M et N, à distance finie, et en outre au point à l'infini dans la direction OY.

Les deux points centraux de ce système se composent du

point à l'infini lui-même et du milieu φ de la corde MN. Si donc on fait abstraction du point à l'infini, on peut dire que :

THÉORÈME I. — *Dans toute hyperbole redondante, le lieu géométrique des milieux des cordes parallèles à une asymptote est une hyperbole conique, asymptote à la courbe proposée dans la direction des cordes.*

Pour cette raison nous donnerons au diamètre conjugué de la direction d'une asymptote le nom d'*hyperbole médiane* de cette direction.

Pour distinguer l'une de l'autre les deux asymptotes d'une hyperbole médiane, nous appellerons *asymptote principale* celle qui appartient à la courbe du troisième degré, et *asymptote secondaire* celle qui n'appartient pas à cette courbe.

3. *Propriété du triangle asymptotique.*

Si l'on cherche, par la méthode ordinaire, les équations des deux asymptotes non parallèles aux y, on pose d'abord

$$\varphi(x, y) = xy^2 - \alpha^2 x^3,$$
$$\psi(x, y) = -\beta x^2;$$

puis

$$\varphi(1, m) = m^2 - \alpha^2 = 0,$$

d'où

$$m = \pm \alpha,$$

et les équations cherchées sont

$$y = \alpha x - \frac{\beta}{\alpha}$$

et

$$y = -\alpha x + \frac{\beta}{\alpha}.$$

On voit que les deux asymptotes dont il s'agit coupent l'axe des x en un même point A, tel que $aA = \frac{\beta}{2\alpha^2}$, et l'axe des y en deux points B et C, tels que $aB = aC = \frac{\beta}{2\alpha}$.

De là ce théorème :

THÉORÈME II. — *Dans toute hyperbole médiane, les asymptotes secondaires des trois hyperboles médianes sont les trois médianes du triangle asymptotique.*

Par conséquent, ces trois asymptotes secondaires concourent au centre de gravité g du triangle asymptotique.

4. *Propriété des hyperboles médianes.*

Formons maintenant les équations des trois hyperboles médianes, nous trouverons

$$2xy + \varepsilon = 0,$$
$$2y - (3\alpha^2x^2 - 2\beta x + \gamma) - \alpha(2xy + \varepsilon) = 0,$$
$$2y - (3\alpha^2x^2 + 2\beta x + \gamma) + \alpha(2xy + \varepsilon) = 0.$$

En retranchant de la troisième la première multipliée par 2α, on reproduit la deuxième. Par conséquent :

THÉORÈME III. — *Dans toute hyperbole redondante, les trois hyperboles médianes convergent en quatre points.*

Ces quatre points, μ, ν,..., qui peuvent devenir imaginaires par couples, ne sont autres que les *pôles de l'infini* relatifs à l'hyperbole redondante. Ils appartiennent à tous les diamètres.

5. *Ellipse centrale.*

Le lieu géométrique des centres des diamètres est une ellipse qui passe évidemment par les trois points a, b, c, milieux des côtés du triangle asymptotique et centres des trois hyperboles médianes.

Cette courbe a pour équation

$$y^2 + 3\alpha^2x^2 + \beta x = 0;$$

elle touche l'axe des y à l'origine des coordonnées.

On en déduit ces théorèmes :

THÉORÈME IV. — *Dans toute hyperbole médiane, l'ellipse centrale est inscrite dans le triangle asymptotique suivant les milieux de ses côtés.*

THÉORÈME V. — *Les deux asymptotes, principale et secondaire, de chaque hyperbole médiane, ont des directions conjuguées relativement à l'ellipse centrale.*

THÉORÈME VI. — *Le centre de l'ellipse centrale coïncide avec le centre de gravité du triangle asymptotique.*

6. *Diamètres en général.*

Dans l'hyperbole redondante, tous les diamètres sont hyperboliques.

Le diamètre conjugué de la direction gz, dont le coefficient angulaire est m, a pour équation

$$3\alpha^2x^2 + 2\beta x + \gamma - y^2 - m(2xy + \varepsilon) = 0.$$

Les coordonnées de son centre vérifient l'équation

$$y = -mx.$$

La droite qui joint ce centre à l'origine des coordonnées a son coefficient angulaire égal et de signe contraire à celui de la direction considérée.

Comme d'ailleurs ce centre est situé sur la conique centrale, on peut le trouver par cette construction fort simple :

Par le point a, menons $a\alpha$ parallèle à gz. Par α, menons αO parallèle à BC; O sera le centre cherché.

L'inspection de la figure met en évidence un théorème relatif à l'ellipse, si l'on observe que les points b et c peuvent servir de la même manière que le point a à la construction du point O. Ce théorème peut s'énoncer ainsi :

Étant donnés un triangle et une ellipse inscrite suivant les pieds des médianes, si par un point de cette courbe on mène des parallèles aux trois côtés du triangle, ces droites couperont l'ellipse en des points tels, que les droites qui les joignent respectivement aux milieux des côtés correspondants seront parallèles entre elles.

7. *Intersections des asymptotes et de la courbe.*

Les trois asymptotes d'une hyperbole redondante forment une courbe du troisième degré.

Les points d'intersection de cette courbe et de la proposée, lesquels sont au nombre de neuf, sont tels, que six d'entre eux se trouvent sur une conique, composée d'une double droite à l'infini. Les trois autres m, n, p sont donc en ligne droite. De là ce théorème :

THÉORÈME VII. — *Les trois points d'intersection, à distances finies, d'une hyperbole redondante avec ses asymptotes sont en ligne droite.*

8. *Construction de la courbe.*

Pour être à même de construire une hyperbole redondante, il est nécessaire et suffisant de connaître :

1° Le triangle asymptotique;
2° Un point d'une première hyperbole médiane;
3° Un point d'une seconde hyperbole médiane;
4° Un point de la courbe.

On construira d'abord les deux premières hyperboles médianes, connaissant pour chacune d'elles les asymptotes et un point.

Les points d'intersection de ces deux courbes appartiendront à la troisième hyperbole médiane et permettront de la construire.

Connaissant les hyperboles médianes et un point 1 de la courbe, on construira les points 2, 3, 4,..., 2′, 3′,.., c'est-à-dire autant de points de la courbe qu'on le voudra.

Les données conduisent à neuf conditions entre les coefficients de l'équation générale non simplifiée de la courbe du troisième degré.

9. *Droites médianes.*

Il peut arriver exceptionnellement qu'une hyperbole médiane se réduise à ses deux asymptotes.

Dans ce cas, l'asymptote secondaire devient une *droite médiane* qui joue un rôle tout à fait analogue à celui des diamètres dans les coniques.

L'hyperbole médiane conjuguée de aY ayant pour équation

$$2xy + \varepsilon = 0,$$

la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une droite médiane conjuguée de la direction des y est

$$\varepsilon = 0.$$

L'équation de la courbe prend alors la forme

$$xy^2 = \alpha^2 x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

Il peut arriver aussi que les trois hyperboles médianes se réduisent chacune à deux droites. Dans ce cas la courbe est à trois droites médianes.

Les pôles de l'infini occupent alors les trois sommets et le centre de gravité du triangle asymptotique.

10. *Dégénérescence du triangle asymptotique en un point.*

La relation

$$aB = aC = \frac{2\beta}{\alpha},$$

que nous avons trouvée plus haut, montre que si β est nul, le triangle asymptotique se réduit à un point.

De là des courbes à *asymptotes convergentes.*

L'équation générale de ces courbes est

$$xy^2 + \varepsilon y = \alpha^2 x^3 + \gamma x + \delta.$$

11. *Nombre des espèces.*

Newton et Stirling ont établi les subdivisions suivantes :

Hyperboles redondantes.	Asymptotes non convergentes ($\beta \gtrless 0$)	sans droites médianes ($\varepsilon \gtrless 0$)	.....	9 esp.
		avec droites médianes ($\varepsilon = 0$)	une seule médiane.	14 esp.
			trois médianes....	4 esp.
	Asymptotes convergentes ($\beta = 0$)	sans droites médianes ($\varepsilon \gtrless 0$)	.....	4 esp.
		avec droites médianes ($\varepsilon = 0$)	une seule médiane.	4 esp.
			trois médianes....	1 esp.

En tout trente-six espèces d'hyperboles redondantes.

CHAPITRE III.

COURBES DE LA FAMILLE ELLIPTIQUE.

1. *Forme générale des hyperboles défectives.*

Les *hyperboles défectives,* ainsi appelées par Newton *parce qu'elles présentent moins de branches hyperboliques que les sections coniques,* n'ont à l'infini qu'un seul point, réel et simple.

Ces courbes présentent donc une seule branche hyperbolique, laquelle est souvent accompagnée d'une ovale (*fig.* 2, *Pl. I*).

Le diamètre conjugué de la direction du point à l'infini est une hyperbole conique, qui admet pour asymptote principale l'asymptote de la courbe et qui joue le rôle d'*hyperbole médiane.*

Par conséquent :

THÉORÈME VIII. — *Dans toute hyperbole défective, le lieu géométrique des milieux des cordes parallèles à l'asymptote est une hyperbole conique asymptotique à la courbe proposée, dans la direction des cordes.*

En prenant pour axes des x et des y les deux asymptotes, secondaire et principale, de l'hyperbole médiane, on met l'équation de l'hyperbole défective sous la forme simplifiée

$$xy^2 + \varepsilon y = -\alpha^2 x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, \tag{2}$$

α ne pouvant être nul.

2. *Conique centrale.*

La conique centrale est une hyperbole qui a pour équation

$$y^2 - 3\alpha^2 x^2 + \beta x = 0.$$

Elle touche l'axe des y à l'origine des coordonnées, et les

axes des coordonnées ont des directions conjuguées relativement à cette courbe.

Les coordonnées du centre C sont

$$y = 0,$$
$$x = \frac{\beta}{6\alpha^2}.$$

Les coefficients angulaires des deux asymptotes sont $\alpha\sqrt{3}$ et $-\alpha\sqrt{3}$, en sorte que AP = AQ.

Théorème IX. — *Dans toute hyperbole défective, la conique centrale est une hyperbole tangente à l'asymptote et dans laquelle les deux asymptotes de l'hyperbole médiane ont des directions conjuguées.*

3. *Diamètres.*

On démontrerait, comme pour les hyperboles redondantes, que, pour obtenir le centre du diamètre conjugué de la direction CZ, il suffit de mener OM parallèle à CZ, puis MN parallèle à OY. Le point N, situé sur l'hyperbole centrale, est le centre cherché.

Si l'on prend CZ parallèle à une des asymptotes de l'hyperbole centrale, la construction précédente conduit à un point à l'infini dans la direction de l'autre asymptote de cette hyperbole; d'où il résulte que le diamètre correspondant est parabolique.

Par conséquent :

Théorème X. — *Dans toute hyperbole défective il y a deux diamètres paraboliques, lesquels correspondent aux directions des asymptotes de l'hyperbole médiane.*

L'équation des diamètres en général est

$$-3\alpha^2x^2 + 2\beta x + \gamma - y^2 - m(2xy + \varepsilon) = 0.$$

Les deux diamètres paraboliques ont pour équations respectives :

$$(y + \sqrt{3}\alpha x)^2 = 2\beta x + \gamma + \varepsilon\alpha\sqrt{3},$$
$$(y - \sqrt{3}\alpha x)^2 = 2\beta x + \gamma - \varepsilon\alpha\sqrt{3}.$$

Si l'on retranche l'une de l'autre ces deux équations et si l'on divise par $2\alpha\sqrt{3}$ l'équation résultante, on obtient l'équation

$$2xy = \varepsilon$$

de l'hyperbole médiane. D'où l'on conclut que *les deux diamètres paraboliques se coupent sur l'hyperbole médiane.*

Ces points d'intersection $\mu, \nu, \ldots$, ne sont autres que les *pôles de l'infini* relatifs à la courbe donnée. Ils appartiennent donc à tous les diamètres.

4. *Nouvelle forme de l'équation.*

La courbe centrale étant une hyperbole, on peut se proposer de rapporter l'équation de la courbe aux deux asymptotes de cette hyperbole prises pour axes des coordonnées.

Reprenons l'équation générale

$$ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3+ex^2+2fxy+gy^2+hx+ky+l=0.$$

L'équation générale de la courbe centrale est

$$\begin{aligned}&9[(ac-b^2)x^2+(ad-bc)xy+(bd-c^2)y^2]\\&+3[(ag-2bf+ce)x+(bg-2cf+de)y]+ge-f^2=0.\end{aligned}$$

Cette équation devant se réduire à la forme

$$xy = \text{const.},$$

on doit poser

$$\begin{cases} ac-b^2=0,\\ bd-c^2=0,\\ ag-2bf+ce=0,\\ bg-2cf+de=0.\end{cases}$$

Ajoutons membre à membre la première équation multipliée par c et la seconde multipliée par a, nous aurons

$$b(bc-ad)=0.$$

Or le facteur $(bc-ad)$, étant le coefficient du terme en xy

dans l'équation de l'hyperbole centrale, ne peut s'annuler; par conséquent

$$b = 0.$$

La seconde équation donne alors

$$c = 0,$$

et les deux dernières équations deviennent

$$ag = 0,$$
$$de = 0.$$

D'autre part, le discriminant D se réduit à a^2d^2, et comme il diffère nécessairement de zéro, il en résulte que ni a ni d ne peuvent être nuls. Donc, en vertu des équations ci-dessus,

$$g = 0,$$
$$e = 0.$$

Par conséquent l'équation de la courbe se réduit à la forme

$$(2\,bis) \qquad ax^3 + by^3 + 2cxy + dx + ey + f = 0,$$

très-analogue à l'équation générale des courbes du second degré.

L'équation de la courbe centrale devient alors

$$xy = \frac{c^2}{9ab};$$

cette courbe se réduit à un système de deux droites lorsque $c = 0$.

5. *Conséquences de cette équation.*

Relativement aux axes de coordonnées qui viennent d'être définis, les équations des deux diamètres paraboliques deviennent

$$3ax^2 + 2cy + d = 0$$

et

$$3by^2 + 2cx + e = 0.$$

Elles montrent que :

THÉORÈME XI. — *Dans toute hyperbole défective, chaque asymptote de l'hyperbole centrale est le diamètre conjugué de la direction de l'autre asymptote dans le diamètre parabolique correspondant à cette direction.*

Ou, en d'autres termes,

Dans toute hyperbole défective, chaque asymptote de l'hyperbole centrale admet l'autre asymptote de cette courbe pour diamètre harmonique de sa direction.

L'équation de l'hyperbole médiane devient

$$3a^{\frac{4}{3}}x^2 + 3b^{\frac{4}{3}}y^2 + 2c\left(b^{\frac{1}{3}}x + a^{\frac{1}{3}}y\right) + da^{\frac{1}{3}} + eb^{\frac{1}{3}} = 0.$$

Elle montre que :

THÉORÈME XII. — *Dans toute hyperbole défective, les asymptotes de l'hyperbole centrale ont des directions conjuguées relativement à l'hyperbole médiane.*

Plus généralement :

THÉORÈME XIII. — *Dans toute hyperbole défective, les asymptotes de l'hyperbole centrale ont des directions conjuguées relativement à tout diamètre.*

Car l'équation d'un diamètre quelconque est dépourvue de terme en xy.

6. *Nombre des espèces.*

L'hyperbole médiane peut dégénérer en un système de deux droites, dont une est une *droite médiane;* cela a lieu quand $\varepsilon = 0$.

Newton et Stirling ont donné la subdivision suivante :

Hyperboles défectives	sans droite médiane ($\varepsilon \gtrless 0$).	6 espèces.
	avec droite médiane ($\varepsilon = 0$).	7 espèces.

CHAPITRE IV.

COURBES DE LA FAMILLE PARABOLIQUE.

1. *Caractères distinctifs.*

Les courbes de la famille parabolique ont pour caractères géométriques distinctifs :

1° De présenter un point multiple à l'infini ;

2° De donner lieu à un seul diamètre parabolique ou à une infinité de diamètres paraboliques ;

3° De donner lieu à une courbe centrale parabolique.

Le point multiple à l'infini peut être *double* ou *triple*. Dans le premier cas il est nécessairement accompagné d'un autre point à l'infini, lequel est simple.

L'existence de deux cas distincts, dans la nature du point multiple à l'infini, conduit à diviser la famille parabolique en deux classes.

PREMIÈRE CLASSE.

Courbes qui ont à l'infini un point double et un point simple.

2. *Propriétés générales.*

L'équation générale des courbes de la première classe est

$$xy^2 + \varepsilon y = \beta x^2 + \gamma x + \delta, \tag{3}$$

en faisant usage des axes de coordonnées suivants.

L'axe des y est l'asymptote des branches hyperboliques qui correspondent nécessairement au point simple à l'infini. L'axe des x est l'asymptote secondaire du diamètre hyperbolique

qui correspond à la direction de ce point simple. Ce diamètre joue le rôle d'hyperbole médiane. Par conséquent :

THÉORÈME XIV. — *Dans toute courbe parabolique de la première classe, le lieu géométrique des milieux des cordes parallèles à la direction du point hyperbolique est une hyberbole conique, asymptotique à la courbe proposée dans la direction de ce point.*

Si l'on cherche, pour obtenir la direction du point double à l'infini, la limite de $\frac{y}{x}$ pour x infini, on trouve zéro.

Par conséquent :

THÉORÈME XV. — *Dans toute courbe parabolique de la première classe, la direction du point parabolique est celle de l'asymptote secondaire de l'hyperbole médiane qui correspond à la direction du point simple.*

L'équation du diamètre conjugué de la direction dont le coefficient angulaire est m est

$$y^2 - 2\beta x - \gamma + m(2xy + \varepsilon) = 0.$$

Ce diamètre ne peut être une parabole que pour la direction de l'axe des x, laquelle correspond à $m = 0$.

Par conséquent :

THÉORÈME XVI. — *Dans toute courbe parabolique de la première classe il existe un diamètre parabolique unique, lequel est conjugué de la direction du point double à l'infini.*

L'équation du diamètre parabolique est

$$y^2 = 2\beta x + \gamma.$$

Il est évident que ce diamètre est une ligne médiane relativement aux cordes parallèles à l'axe des x. Nous lui donnerons le nom de *parabole médiane* de la direction du point parabolique.

L'équation ci-dessus montre que l'axe des x est, relativement à la parabole médiane, le diamètre conjugué de la direction des y.

La courbe centrale a pour équation

$$y^2 = -\beta x.$$

C'est une parabole qui touche l'axe des y à l'origine des coordonnées, ou, si β est nul, une droite double coïncidant avec l'axe des x.

Par conséquent :

THÉORÈME XVII. — *Dans toute courbe parabolique de la première classe, l'asymptote de la branche hyperbolique est tangente à la parabole centrale, lorsque cette courbe ne se réduit pas à une droite double.*

Newton a distingué dans cette classe les *hyperboles paraboliques* et les *hyperbolismes de coniques*.

3. *Hyperboles paraboliques.*

L'équation générale des *hyperboles paraboliques* est

$$xy^2 + \varepsilon y = \beta x^2 + \gamma x + \delta, \tag{3}$$

β étant nécessairement différent de zéro.

On déduit de cette équation

$$y = -\frac{\varepsilon}{2x} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4x^2} + \beta x + \gamma + \frac{\delta}{x}},$$

et l'on voit que y devient infini en même temps que x.

Par conséquent il n'existe pas d'asymptotes correspondant à la direction du point double à l'infini, et la courbe présente nécessairement des branches paraboliques qui finissent par devenir parallèles à l'axe des x (*fig.* 1, *Pl. II*).

Si l'on considère la parabole dont l'équation est

$$y'^2 = \beta x + \gamma,$$

d'où

$$y' = \pm\sqrt{\beta x + \gamma},$$

on voit que la différence

$$(y - y')$$

tend vers zéro quand x augmente indéfiniment.

Par conséquent :

THÉORÈME XVIII. — *Dans toute hyperbole parabolique, il existe une parabole asymptote aux branches paraboliques.*

La parabole asymptote et la parabole centrale sont égales entre elles, tournées en sens contraire, et admettent pour diamètre commun de la direction du point hyperbolique l'asymptote secondaire de l'hyperbole médiane.

La parabole médiane dérive de la parabole asymptote en multipliant par $\sqrt{2}$, *sans déplacer leurs milieux, les cordes menées dans cette dernière parallèlement à la direction du point hyperbolique.*

Ce théorème résume les relations diverses qui existent entre les deux asymptotes de l'hyperbole médiane et les trois paraboles centrale, asymptote et médiane.

L'équation

$$y^2 - 2\beta x - \gamma + m(2xy + \varepsilon) = 0$$

du diamètre de la direction dont le coefficient angulaire est m montre que le centre du diamètre de la direction OM s'obtient, au moyen de la parabole centrale, en menant MC parallèle à OY.

Lorsque ε est nul, l'hyperbole médiane se réduit aux deux droites OY et OX et l'axe des x devient une droite médiane.

Newton et Stirling ont donné la subdivision suivante :

Hyperboles paraboliques	sans droite médiane	$(\varepsilon \gtrless 0)$.	7 espèces.
	avec droite médiane	$(\varepsilon = 0)$.	4 espèces.

En tout, onze espèces.

4. *Hyperbolismes.*

L'équation générale des *hyperbolismes de coniques* est

$$xy^2 + \varepsilon y = \gamma x + \delta. \tag{3 bis}$$

Newton a donné le nom d'*hyperbolisme* de la courbe représentée par l'équation

$$y = f(x)$$

à la courbe représentée par l'équation

$$xy = f(x),$$

courbe qui dérive de la précédente de la même manière que l'hyperbole dérive de la droite.

On trouve aisément que la courbe dont l'équation (4) représente l'hyperbolisme est une conique ayant pour équation

$$y^2 + \varepsilon y = \gamma x^2 + \delta x;$$

de là le nom d'*hyperbolisme de conique.*

Suivant que γ est positif, négatif ou nul, la conique est une hyperbole, une ellipse ou une parabole.

Dans tout hyperbolisme, la parabole centrale se réduit à une droite double, laquelle est l'axe des x, que l'on peut appeler *droite centrale double.*

L'équation du diamètre parabolique se réduit à

$$y^2 = \gamma.$$

Ce diamètre se compose donc d'un système de deux droites MN, M'N' (*fig.* 2, *Pl. II*), parallèles à l'axe des x qui est également distant de chacune d'elles, ou d'un système de deux droites imaginaires, ou de l'axe des x, en qualité de *droite* double.

L'équation de la parabole asymptote devient également

$$y^2 = \gamma.$$

Par conséquent :

Théorème XIX.— *Dans tout hyperbolisme, le diamètre parabolique et la parabole asymptote coïncident. Ces deux courbes se réduisent soit à deux droites parallèles, réelles ou imaginaires, également distantes de l'asymptote secondaire de l'hyperbole médiane, soit à une droite double qui n'est autre que cette asymptote.*

Suivant que γ est positif, négatif ou nul, l'équation

$$y^2 + \varepsilon y = \gamma x^2 + \delta x$$

de la *conique directrice* représente une hyperbole, une ellipse ou une parabole. De là les trois tribus d'hyperbolismes.

Dans chaque tribu il existe une droite médiane si ε est nul.

Newton et Stirling ont donné les subdivisions suivantes :

Hyperbolismes	de l'hyperbole ($\gamma > 0$)	sans droite médiane,	3 espèces.
		avec médiane.....	1 espèce.
	de l'ellipse ($\gamma < 0$)	sans médiane.....	2 espèces.
		avec médiane.....	1 espèce.
	de la parabole ($\gamma = 0$)	sans médiane.....	1 espèce.
		avec médiane.....	1 espèce.

En tout neuf espèces.

DEUXIÈME CLASSE.

Courbes ayant un point triple à l'infini.

5. *Propriétés générales.*

Les courbes de cette classe sont comprises dans l'équation générale

$$\lambda y^2 + \mu xy + \nu y = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,$$

α ne pouvant être nul.

Le diamètre conjugué de la direction dont le coefficient angulaire est m a pour équation

$$(\mu y - 3\alpha x^2 - 2\beta x - \gamma) - m(2\lambda y + \mu x + \nu) = 0.$$

Ce diamètre est parabolique, quel que soit m.

Il en résulte que la conique centrale se compose nécessairement de la droite à l'infini et d'une autre droite qui peut elle-même aller à l'infini.

Par conséquent :

THÉORÈME XX. — *Dans toute courbe parabolique de la deuxième classe, tous les diamètres sont paraboliques.*

Cette classe comprend :

Les paraboles divergentes ;
Les tridents ;
Les paraboles cubiques ;
Les systèmes de droites parallèles.

6. *Paraboles divergentes.*

Les *paraboles divergentes* sont comprises dans l'équation

$$(4) \qquad y^2 = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x.$$

L'axe des x est la *droite médiane* qui représente, conjointement avec la droite à l'infini, le diamètre conjugué de la direction du point à l'infini.

La conique centrale se compose de la droite à l'infini et d'une droite O′Y′, passant par le point à l'infini, et dont l'équation est

$$3\alpha x + \beta = 0.$$

Si l'on transporte en O′ l'origine des coordonnées, l'équation de la courbe prend la forme

$$y^2 = \alpha x^3 + \gamma x + \delta,$$

et l'équation générale des diamètres devient

$$x^2 = \frac{2m}{3\alpha} y - \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Elle montre que tous les diamètres ont leurs axes parallèles à O′Y′ et que, dans chacun d'eux, cette droite est le diamètre conjugué de la direction OX.

Par conséquent :

Théorème XXI.— *Dans toute parabole divergente, la droite centrale est parallèle aux axes de tous les diamètres et coupe toutes ces courbes sous des angles égaux.*

Les paraboles divergentes doivent leur nom à cette circonstance que leurs branches paraboliques divergent de plus en plus de la droite médiane.

Newton et Stirling comptent cinq espèces de paraboles divergentes.

7. *Tridents.*

L'équation des *tridents*

$$xy = \alpha x^3 + \beta x^2 + \delta$$

ne représente qu'une seule espèce de courbes.

Le diamètre conjugué de la direction du point à l'infini se compose de la droite à l'infini et de la droite OY, asymptote à la courbe.

Par conséquent :

THÉORÈME XXII. — *Dans le trident, l'asymptote de la courbe constitue, conjointement avec la droite à l'infini, le diamètre de sa propre direction.*

Les diamètres sont des paraboles dont l'équation générale est

$$3\alpha x^2 + (2\beta - m)x - y = 0.$$

L'équation de la courbe centrale se présente sous la forme $1 = 0$; on en conclut que cette courbe se compose doublement de la droite à l'infini.

8. *Parabole cubique.*

L'équation

$$y = \alpha x^3$$

de la *parabole cubique* ne donne lieu qu'à une seule espèce de courbes.

L'axe des x touche la courbe en un point d'inflexion; l'axe des y passe par ce point d'inflexion et se dirige vers le point à l'infini.

L'équation générale des diamètres devient

$$3\alpha x^2 = m.$$

Par conséquent :

THÉORÈME XXIII. — *Dans la parabole cubique les diamètres se réduisent à des systèmes de deux droites parallèles à la direction des branches infinies et également distantes du point d'inflexion.*

L'axe OY représente, en qualité de droite double, le diamètre de sa propre direction.

La courbe centrale se compose de la droite à l'infini et de l'axe OY.

Par conséquent :

THÉORÈME XXIV. — *Dans la parabole cubique la parallèle aux diamètres menée par le point d'inflexion et la droite à l'infini constituent la conique centrale.*

9. *Droites parallèles.*

Les systèmes de trois droites parallèles, omis par Newton et rétablis par Stirling, donnent lieu aux six espèces suivantes:

1° Trois droites réelles et distinctes sans axe de symétrie;

2° Trois droites réelles et distinctes dont une forme axe de symétrie et conséquemment une *droite médiane;*

3° Deux droites imaginaires et une droite réelle ne formant pas axe de symétrie;

4° Deux droites imaginaires et une droite réelle jouant le rôle d'axe de symétrie ou de *droite médiane;*

5° Une droite double et une droite simple;

6° Une droite triple.

Il y a donc trois espèces sans droite médiane et trois espèces avec droite médiane.

NOTES.

NOTE I.

SUR L'ÉQUATION DU DIAMÈTRE HARMONIQUE.

L'expression symbolique

$$(1)\qquad \left(\frac{df}{dx}+m\frac{df}{dx}\right)^{p-1}$$

peut s'écrire

$$(2)\qquad \sum_0^{p-1} C_n^{p-1}\frac{d^{p-1}f}{dx^{p-n-1}dy^n}m^n.$$

La sommation est relative aux valeurs entières de o à p attribuées à l'indice n; C_n^{p-1} indique le nombre des combinaisons de $(p-1)$ objets n à n.

Si l'on désigne par $\varphi(x, y)$ l'ensemble des termes du degré p, dans $f(x, y)$, et par $\psi(x, y)$ l'ensemble des termes du degré $(p-1)$, dans le même polynôme, l'expression (2) équivaut à

$$(3)\qquad \sum_0^{p-1} C_n^{p-1} m^n\left(\frac{d^{p-1}\varphi}{dx^{p-n-1}dy^n}+\frac{d^{p-1}\psi}{dx^{p-n-1}dy^n}\right).$$

Posons

$$\varphi(x, y)=\sum_0^p A_n x^{p-n}y^n,$$

$$\psi(x, y)=\sum_0^{p-1} B_n x^{p-n-1}y^n,$$

et désignons par P_s le nombre des permutations que l'on peut faire avec s objets ($P_0=1$), nous aurons

$$\frac{d^{p-1}\varphi}{dx^{p-n-1}dy^n}=P_{p-n-1}P_n[(p-n)A_n x+(n+1)A_{n+1}y],$$

$$\frac{d^{p-1}\psi}{dx^{p-n-1}dy^n}=P_{p-n-1}P_n B_n.$$

Portant ces valeurs dans l'expression (3), il vient

$$(4)\quad \sum_0^{p-1} m^n C_n^{p-1} P_{p-n-1} P_n [(p-n) A_n x + (n+1) A_{n+1} y + B_n].$$

On a d'ailleurs identiquement

$$C_n^{p-1} = \frac{P_{p-1}}{P_{p-n-1} P_n}.$$

Par conséquent l'équation du diamètre harmonique peut s'écrire

$$(5)\quad \sum_0^{p-1} B_n m^n + x \sum_0^{p-1} (p-n) A_n m^n + y \sum_0^{p-1} (n+1) A_{n+1} m^n = 0.$$

Observons maintenant que

$$\sum_0^{p-1} (p-n) A_n m^n = \sum_0^{p} (p-n) A_n m^n,$$

$$\sum_0^{p-1} (n+1) A_{n+1} m^n = \sum_0^{p} n A_n m^{n-1},$$

et portons ces valeurs dans l'équation (5), nous trouverons

$$(6)\quad px \sum_0^{p} A_n m^n + (y - mx) \sum_0^{p} n A_n m^{n-1} + \sum_0^{p-1} B_n m^n = 0.$$

On a évidemment

$$\sum_0^{p} A_n m^n = \varphi(1, m),$$

$$\sum_0^{p} n A_n m^{n-1} = \frac{d}{dm} \sum_0^{p} A_n m^n = \frac{d\varphi(1, m)}{dm},$$

$$\sum_0^{p-1} B_n m^n = \psi(1, m).$$

L'équation du diamètre harmonique devient donc définitivement

$$(7)\quad px\varphi(1, m) + (y - mx) \frac{d\varphi(1, m)}{dm} + \psi(1, m) = 0.$$

NOTE II.

SUR LES DIAMÈTRES DES DIRECTIONS HYPERBOLIQUES.

Si l'on considère une asymptote d'une courbe du degré p comme une sécante de cette courbe, deux des points d'intersection se trouvent à l'infini. Ils figurent donc parmi les points centraux d'ordre n du système des points d'intersection de l'asymptote et de la courbe, pourvu que n soit inférieur à $(p-1)$.

Par conséquent, l'asymptote d'une courbe du degré p est asymptote de tout diamètre, d'ordre inférieur à $p-1$, de sa propre direction.

D'après cela, le diamètre d'ordre $(p-2)$ de la direction de l'asymptote est une hyperbole ayant avec la courbe une asymptote commune. Cette asymptote se confond avec son propre diamètre conjugué relativement à l'hyperbole, lequel n'est autre que le diamètre harmonique de la direction de l'asymptote relativemeut à la courbe donnée.

NOTE III.

SUR LA FORMULE $P_t S_{n-t} = \theta^{(t)}(x)$.

Considérons une fonction du degré n

$$\theta(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Prenons t quelconques des facteurs binômes du second membre, et formons leur produit. Nous obtiendrons une fonction du degré t que nous désignerons par F_{n-t}.

En choisissant les t facteurs de toutes les manières possibles, on forme $\frac{n(n-1)\ldots(n-t+1)}{1.2\ldots t}$ fonctions F_{n-t}. Nous désignons par S_{n-t} la somme de ces fonctions.

Cela posé, on a évidemment

$$\theta'(x) = S_{n-1}.$$

Le second membre de cette équation est composé de n termes de la forme F_{n-1}; chacun d'eux donne, par la dérivation, $(n-1)$ termes de la forme F_{n-2}. Par conséquent $\theta''(x)$ est la somme de $n(n-1)$ termes de cette dernière forme. Le nombre des fonctions F_{n-2} n'étant que de $\frac{n(n-1)}{2}$, il s'ensuit que chacune de ces fonctions entre deux fois dans l'expression de $\theta''(x)$. On a donc

$$\theta''(x) = 1.2\, S_{n-2}.$$

Le second membre de cette nouvelle équation est la somme de $n(n-1)$ termes de la forme F_{n-3}. Il en résulte que $\theta'''(x)$ est la somme de $n(n-1)(n-2)$ termes de la forme F_{n-3}. Le nombre des fonctions F_{n-3} n'étant que de $\frac{n(n-1)(n-3)}{1.2.3}$, il s'ensuit que chacune de ces fonctions entre $1.2.3$ fois dans l'expression de $\theta'''(x)$. On a donc

$$\theta'''(x) = 1.2.3\, S_{n-3}.$$

En continuant de raisonner ainsi, on arrive à la formule

$$\theta^{(t)}(x) = 1.2.3..\ t\, S_{n-t}$$

ou

$$\theta^{(t)}(x) = P_t\, S_{n-t},$$

en désignant par P_t le nombre des permutations que l'on peut faire avec t objets.

NOTE IV.

SUR L'ÉQUATION DE LA POLAIRE D'ORDRE n.

Considérons les deux équations simultanées

$$(1) \qquad y-\beta=\lambda(x-\alpha),$$

$$(2) \qquad \sum_0^n (-1)^{n-t} C_{p-n}^{p-t} \frac{1}{P_t} (x-\alpha)^t f^{(t)}(x, y)=0;$$

y étant, en vertu de la première, une fonction linéaire de x, on a

$$f^{(t)}(x, y)=\sum_0^t \frac{d^t f(x, y)}{dx^s\, dy^{t-s}} \left(\frac{dy}{dx}\right)^{t-s},$$

la sommation se rapportant à l'indice s.

Or

$$\frac{dy}{dx}=\lambda=\frac{y-\beta}{x-\alpha};$$

donc

$$f^t(x, y)=\sum_0^t \frac{d^t f(x, y)}{dx^s\, dy^{t-s}} \frac{(y-\beta)^{t-s}}{(x-\alpha)^{t-s}}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (2), on trouve

$$\sum_0^n \sum_0^t (-1)^{n-t} C_{p-n}^{p-t} \frac{1}{P_t} (x-\alpha)^t (y-\beta)^{t-s} \frac{d^t f(x, y)}{dx^s\, dy^{t-s}}=0.$$

Telle est l'équation de la polaire d'ordre n du point (α, β) relativement à la courbe représentée par l'équation du degré p

$$f(x, y)=0.$$

On peut lui donner une autre forme en permutant x et α, y et β, et en changeant n en $p-n$. On trouve ainsi

$$\sum_0^p \sum_0^t (-1)^{p-n-t} C_n^{p-t} \frac{1}{P_t} (\alpha-x)^s (y-\beta)^{t-s} \frac{d^t f(\alpha, \beta)}{d\alpha^s\, dy^{t-s}}=0.$$

NOTE V.

SUR LES ÉQUATIONS QUI DÉTERMINENT LES POLES D'ORDRE n.

Prenons l'équation

$$(1)\quad \sum_0^{p-n}\sum_0^t (-1)^{p-n-t} C_n^{p-t} C_s^t \frac{1}{P_t}(\alpha-x)^s(\beta-y)^{t-s}\frac{d^t f(\alpha,\beta)}{d\alpha^s\, d\beta^{t-s}}=0$$

de la polaire d'ordre n du point (α, β) relativement à la courbe

$$f(x, y)=0$$

du degré p.

Dans l'expression qui entre sous le double signe de sommation, faisons $t=s=p-n$, nous aurons

$$\frac{1}{P_{p-n}}(\alpha-x)^{p-n}\frac{d^{p-n}f(\alpha,\beta)}{d\alpha^{p-n}}.$$

Le coefficient du terme en x^{p-n}, dans l'équation (1), est donc

$$(-1)^{p-n}\frac{1}{P_{p-n}}\frac{d^{p-n}f(\alpha,\beta)}{d\alpha^{p-n}}.$$

On voit de la même manière, en faisant $s=0$ et $t-s=p-n$, que le coefficient du terme en y^{p-n} dans l'équation (1) est

$$(-1)^{p-n}\frac{1}{P_{p-n}}\frac{d^{p-n}(\alpha,\beta)}{d\beta^{p-n}}.$$

Pour obtenir le terme constant de la même équation, il suffit de faire $x=0$ et $y=0$ dans le premier membre.

Par conséquent, l'équation (1) peut être mise sous la forme

$$(-1)^{p-n}\frac{d^{p-n}(\alpha,\beta)}{d\alpha^{p-n}}x^{p-n}+(-1)^{p-n}\frac{d^{p-n}(\alpha,\beta)}{d\beta^{p-n}}+\varphi(x,y)$$
$$+\sum_0^{p-n}\sum_0^t(-1)^{p-n-t}C_n^{p-t}C_s^t\frac{1}{P_t}\alpha^s\beta^{t-s}\frac{d^t f(\alpha,\beta)}{d\alpha^s\, d\beta^{t-s}}=0,$$

$\varphi(x, y)$ désignant un polynôme du degré $p-1$, sans terme constant.

De cette remarque dérivent les équations posées à la page 44 pour déterminer les pôles de l'ordre n.

NOTE VI.

SUR LE NOMBRE DES TERMES D'UN POLYNÔME A DEUX VARIABLES.

Étant donné un polynôme complet, du degré p, en x et y, on peut le décomposer en parties homogènes des degrés 0, 1, 2,..., p.

Les nombres des termes respectivement compris dans ces diverses parties sont 1, 2, 3,..., $(p+1)$.

Par conséquent le nombre des termes du polynôme est

$$1+2+3+\ldots+(p+1)=\frac{(p+1)(p+2)}{2}.$$

NOTE VII.

SUR L'ÉQUATION DU POINT EN GÉOMÉTRIE TANGENTIELLE.

Désignons par $\frac{1}{x}$ l'abscisse d'un point A pris sur l'axe des x, et par $\frac{1}{y}$ l'ordonnée d'un point B pris sur l'axe des y, en géométrie cartésienne.

x et y seront les coordonnées tangentielles de la droite AB.

L'équation de cette droite sera

$$(1) \qquad xX + yY = 1,$$

X et Y désignant les coordonnées courantes.

Supposons que A et B se déplacent sur les axes en conservant des positions relatives telles, que l'on ait

$$(2) \qquad ax + by + c = 0.$$

L'équation (1) deviendra

$$x(bX - aY) = b + cY.$$

La droite mobile passe donc constamment par le point dont les coordonnées α et β satisfont aux équations simultanées

$$\begin{cases} b\alpha - a\beta = 0, \\ b + c\beta = 0, \end{cases}$$

lesquelles donnent

$$\alpha = -\frac{a}{c} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{b}{c}.$$

On voit ainsi que l'équation (2), en géométrie tangentielle, représente un point dont les coordonnées cartésiennes sont $-\frac{a}{c}$ et $-\frac{b}{c}$.

NOTE VIII.

SUR L'INTERSECTION D'UNE COURBE ET D'UNE DROITE EN GÉOMÉTRIE TANGENTIELLE.

Soient $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe de la classe p, α et β les coordonnées d'une droite.

Prenons deux tangentes infiniment voisines (x, y) et $(x + h, y + k)$ à la courbe donnée.

Nous aurons

$$(1) \qquad f(x, y) = 0,$$

$$(2) \qquad f(x + h, y + k) = 0.$$

En se bornant aux infiniment petits du premier ordre, on a

$$f(x+h,\ y+k)=f(x,\ y)+hf'_x(x,y)+kf'_y(x,y);$$

et comme $f(x,y)$ doit être nul, d'après l'équation (1), l'équation (2) peut s'écrire

$$(3)\qquad hf'_x+kf'_y=0.$$

Pour que les deux tangentes infiniment voisines se coupent sur la droite (α,β), il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{x-\alpha}{y-\beta}=\frac{h}{k}.$$

L'équation (3) équivaut alors à

$$(4)\qquad (x-\alpha)f'_x+(y-\beta)f'_y=0.$$

Les équations (1) et (4) prises simultanément déterminent les tangentes (x,y) à la courbe donnée aux points où elle rencontre la droite (α,β).

En combinant ces deux équations, on peut substituer à la seconde, laquelle est du degré p, la suivante

$$(5)\qquad (x-\alpha)f'_x+(y-\beta)f'_y-pf=0,$$

qui n'est que du degré $p-1$.

NOTE IX.

SUR LE PÔLE TANGENTIEL D'ORDRE n D'UNE TANGENTE A UNE COURBE.

Pour déterminer le pôle tangentiel d'ordre n d'une tangente T à une courbe, au point C, on peut recourir aux considérations suivantes :

Considérons une sécante qui rencontre la courbe en deux points A et B, infiniment voisins de C.

Les tangentes AS et BS à la courbe aux points A et B concourent en un point S infiniment voisin de C.

Par A, menons le faisceau des tangentes à la courbe; AB différant infiniment peu de AS, une de ses conjuguées d'ordre n, AS′ par exemple, relativement au faisceau, différera elle-même infiniment peu de AS.

Menons de même par B le faisceau des tangentes à la courbe; comme BA diffère infiniment peu de BS, une de ses conjuguées d'ordre n, BS′ par exemple, relativement au nouveau faisceau, différera elle-même infiniment peu de BS.

Par conséquent le pôle tangentiel d'ordre n de AB passe par un point S′ infiniment voisin de S, et, par suite, de C.

Si l'on passe à la limite en faisant tendre AB vers T, S′ tend vers C. En même temps la droite T devient une tangente génératrice de son propre pôle.

Donc *le pôle tangentiel d'ordre n d'une tangente à une courbe touche, sur cette droite, la courbe donnée.*

NOTE X.

SUR LES TANGENTES DE REBROUSSEMENT.

Lorsque la tangente en un point d'une courbe figure, au degré $(n+2)$ de multiplicité, dans le faisceau des tangentes à cette courbe qui peuvent être menées par ce point, nous l'appelons *tangente de rebroussement* de l'ordre n.

Voici comment on peut justifier cette dénomination.

En un point de rebroussement A de l'ordre n arrivent $n+1$ branches de courbe qui ont en ce point une tangente commune T. Prenons sur cette tangente un point B infiniment voisin de A. On peut par ce point B mener une tangente, différente de T, à chacune des $(n+1)$ branches de courbe qui forment le rebroussement. Chacune de ces tangentes dif-

fère infiniment peu de T; donc, parmi toutes les tangentes à la courbe qu'il est possible de mener par B, il y en a $(n+2)$ dont les directions diffèrent entre elles infiniment peu, et qui tendent vers T lorsque B tend vers A.

On voit ainsi que la tangente en un point de rebroussement de l'ordre n figure au degré $(n+2)$ de multiplicité dans les faisceaux de toutes les tangentes à la courbe qui peuvent être menées par ce point.

Les *tangentes de rebroussement* jouent, en géométrie tangentielle, un rôle analogue à celui que jouent les *points d'inflexion* en géométrie cartésienne.

FIN.

LUCAS.

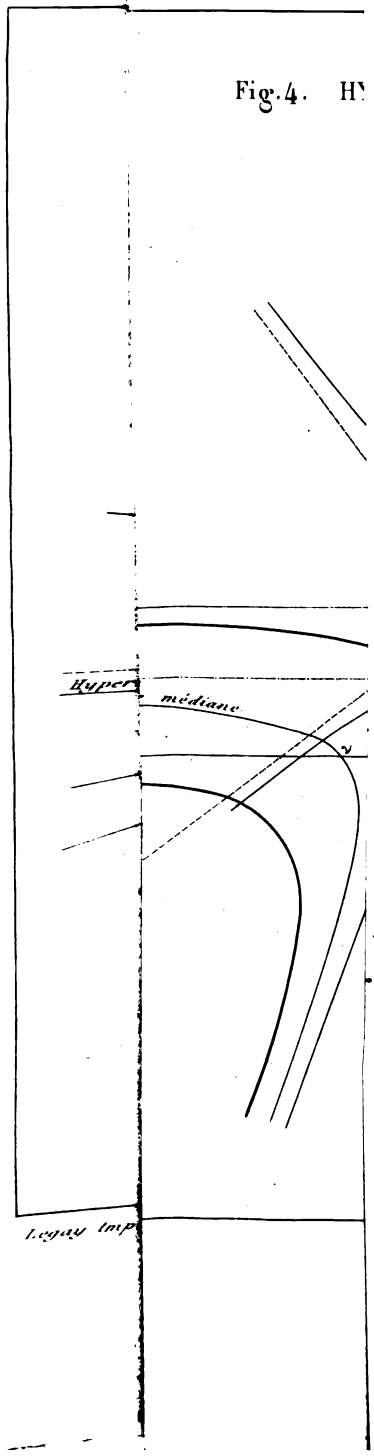



Fig. 4. HY